



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza



Física Experimental II

Instituto de Física

2026

Copyright © 2026 Instituto de Física - UFRJ

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Versão: Jan 2026



Conteúdo

I	O Curso	
1	Informações do Curso	8
1.1	O curso de Física Experimental	8
1.2	Avaliações	8
1.3	Aulas e Experimentos	9
II	Revisão	
2	Revisão - tratamento de dados	11
2.1	Introdução	12
2.2	Algarismos significativos	12
2.3	Precisão e exatidão	14
2.3.1	As fontes de incerteza	14
2.3.2	Erro sistemático	16
2.3.3	Discrepância relativa	16
2.4	Medidas indiretas e propagação de incerteza	17
2.4.1	Algarismos significativos e arredondamentos	19
2.5	Bibliografia	21

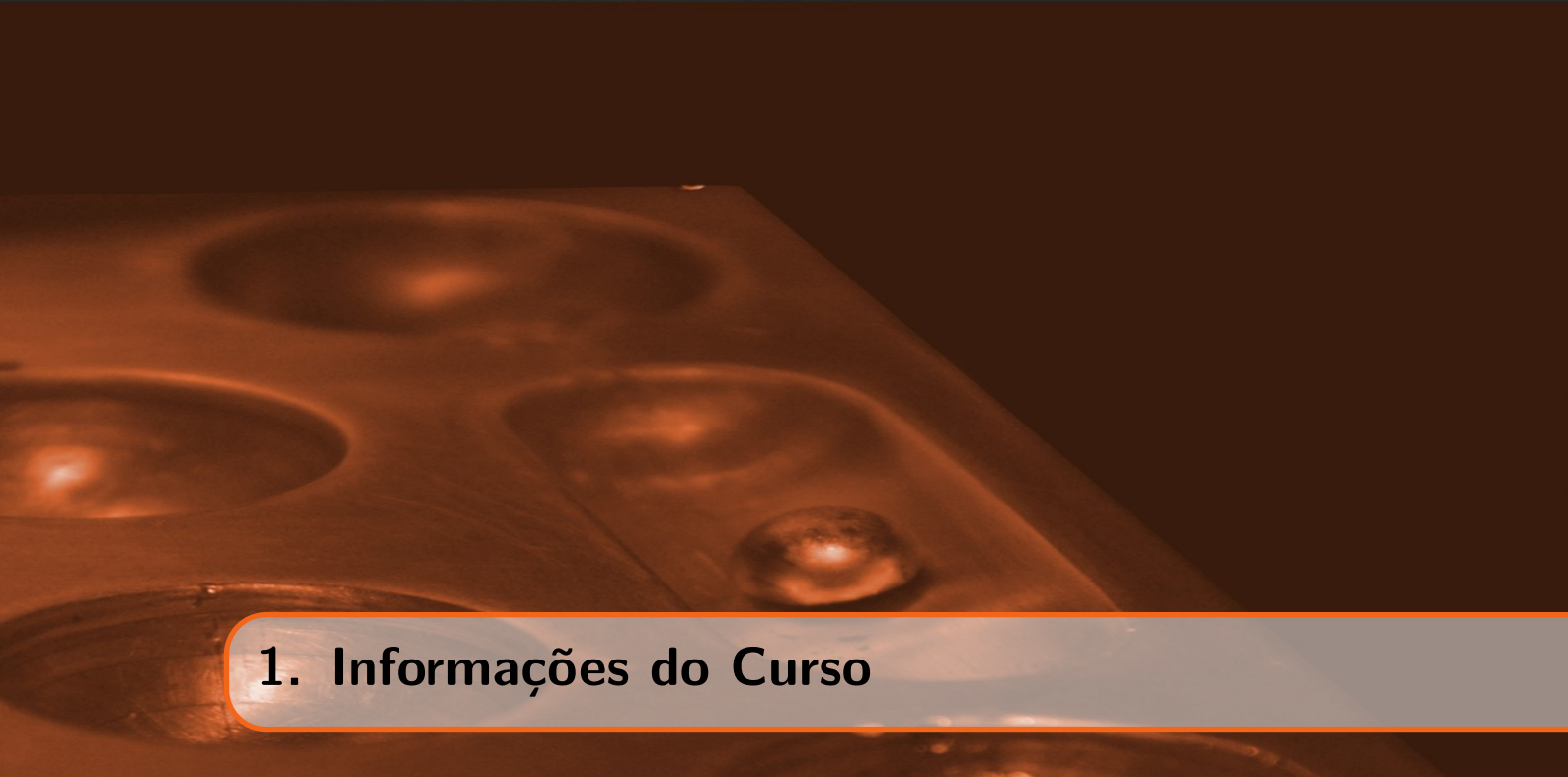
III	Experimento 1	
3	Empuxo e Densidade	23
3.1	Introdução	23
3.2	Modelo	24
3.3	Materiais	25
3.4	Procedimento Experimental	25
3.5	Análise de Dados	26
IV	Experimento 2	
4	Pêndulo Simples	29
4.1	Introdução	29
4.2	Modelo	29
4.3	Material	32
4.4	Procedimento Experimental	32
4.5	Análise dos dados	33
4.6	Bibliografia	33
V	Experimento 3	
5	Oscilador Harmônico Simples	35
5.1	Introdução	35
5.2	Modelo	35
5.3	Material	36
5.4	Procedimento Experimental	36
5.5	Análise de Dados	37
5.6	Bibliografia	38
VI	Experimento 4	
6	Oscilador Harmônico Amortecido	40
6.1	Introdução	40
6.2	Modelo	40
6.3	Material	43
6.4	Procedimento Experimental	43
6.5	Análise de Dados	43
6.6	Bibliografia	44

VII	Experimento 5	
7	Corda vibrante	46
7.1	Introdução	46
7.2	Modelo	47
7.3	Materiais	50
7.4	Procedimento Experimental	51
7.5	Análise de Dados	52
7.6	Bibliografia	52
VIII	Apêndices	
8	Qtiplot	54
9	Qtiplot - Ajuste não Linear OHA	63
10	O Ajuste Não Linear	68
11	Webcam e Software	74



O Curso

1	Informações do Curso	8
1.1	O curso de Física Experimental	
1.2	Avaliações	
1.3	Aulas e Experimentos	



1. Informações do Curso

1.1 O curso de Física Experimental

Em cada sala de aula só serão permitidos no máximo 18 alunos, com prioridade para aqueles que estiverem oficialmente na lista de presença emitida pelo SIGA. Alunos que não constam da lista de presença só poderão ter acesso a sala de aula, caso apresentem CRID com solicitação e confirmação de inscrição na respectiva turma ou, caso haja disponibilidade, conforme avaliação do professor da turma.

Alunos em situação irregular na lista de presença emitida pelo SIGA, não terão notas de relatórios e provas divulgadas até a efetiva regularização e confirmação pelo SIGA.

1.2 Avaliações

Durante o curso serão feitas duas avaliações presenciais individuais (P_1 , P_2) e para cada experimento, haverá a avaliação de um relatório que deverá ser entregue ao final da última aula de cada experimento.

Os relatórios poderão ser feitos em grupos de até no máximo 3 alunos presentes em aula. Alunos que faltarem a aula, não terão notas atribuídas para o relatório.

Não há realização de prova final e para ser aprovado na disciplina, o aluno deverá ter nota final $N_F \geq 5,0$ e ter frequência, em aulas, mínima de 75%.

A nota final é calculada através da seguinte equação:

$$N_F = 0,2 < R > + 0,8 < P >$$

onde $< R >$ é a nota média de relatórios e $< P >$ a nota média das provas.

$$< R > = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{5} \quad (1.1)$$

e

$$< P > = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (1.2)$$

As avaliações presenciais terão duração de 1h 45 min. Nelas, o aluno deverá realizar um experimento, cujo tema será sorteado antes do início da prova. Para realização da prova, o aluno deverá trazer régua, calculadora, caneta, lápis, borracha e papel milimetrado.

A segunda-chamada de P_1 ou P_2 é destinada aos alunos que perderam somente uma das provas. Para ter direito à realização da Prova de 2^a. Chamada, o aluno deverá, em um prazo de 48 h após a respectiva prova, enviar para o email fisexp2@if.ufrj.br, a solicitação. A solicitação deverá conter os motivos e comprovantes para o não comparecimento à prova, tais como:

- alistamento militar;
- declaração de atividade laboral no dia/hora da prova;
- atestado médico;

A prova de segunda-chamada será realizada após a P_2 , com data e horário comunicados via mensagem para email usado para o aluno no momento da solicitação, assim como no cronograma e página internet da disciplina. É responsabilidade do aluno acompanhar e certificar-se que as mensagens do email fisexp2@if.ufrj.br ou pelo AVA não sejam bloqueadas.

1.3 Aulas e Experimentos

As aulas de Física Experimental II tem duração de 120 minutos. Nelas serão realizados experimentos correspondentes a alguns temas da disciplina Física 2 da UFRJ. Para cada experimento estão programadas 2 aulas. Geralmente, na 1^a. aula de cada experimento, o professor irá apresentar o experimento, os cuidados básicos a serem tomados e também acompanhá-lo durante a realização e coleta de dados. A 2^a. aula é destinada para tirar dúvidas na análise de dados ou mesmo refazer o experimento caso seja necessário.

Os experimentos são:

- Empuxo
- Pêndulo
- Oscilador Harmônico Simples
- Oscilador Harmônico Amortecido
- Cordas Vibrantes

Bibliografia:

- Roteiros de Física Experimental II. (IF-UFRJ).
- Fundamentos de Física, Halliday-Resnick-Walker (Vol.2). LTC (2023).
- Física Básica. H.M. Nussenzveig (Vol.2). Edgar Blücher (2014).
- Fundamentos da Teoria de Erros, José Henrique Vuolo. Edgar Blücher Ltda. (1992).

Graduação do Instituto de Física: gradu@if.ufrj.br +55 (21) 3938-7270, +55 (21) 3938-7273



Revisão

2	Revisão - tratamento de dados	11
2.1	Introdução	
2.2	Algarismos significativos	
2.3	Precisão e exatidão	
2.4	Medidas indiretas e propagação de incerteza	
2.5	Bibliografia	

A man wearing safety glasses is working on a complex industrial machine with many pipes and valves. The scene is lit with a warm, orange light. A semi-transparent orange banner is at the bottom of the image.

2. Revisão - tratamento de dados



Conteúdo

2.1 Introdução

Nesta primeira prática vamos rever resumidamente os principais conceitos de representação e tratamento de dados experimentais e aplicá-los a algumas situações simples. O ponto de partida é o entendimento que, ao fazermos uma medição, sempre estaremos cometendo erros cujas origens podem ser a limitação do instrumento de medida, ou dificuldades diversas ao realizar a medida ou limitação na modelagem do sistema. Por exemplo, ao medirmos a largura de um objeto podemos nos deparar com limites que não são bem definidos por conta de irregularidades na superfície. Outro exemplo é nosso tempo de reação. Ao medirmos um intervalo de tempo pode ocorrer um atraso ou um adiantamento no acionamento do cronômetro. Nesses dois exemplos, se repetirmos a medida, veremos que seus valores apresentarão variação aleatória a partir de alguma casa decimal. Para expressar essa situação convencionou-se escrever uma medida experimental na forma

$$y = (\bar{y} \pm \sigma_y)u, \quad (2.1)$$

sendo:

- $\bar{y} \equiv$ valor médio ou valor esperado da medida. Muitas vezes usamos apenas o termo valor da medida.
- $\sigma_y \equiv$ incerteza da medida.
- $u \equiv$ unidade da medida

Esta representação pode ser interpretada como a definição de um intervalo de valores associado a uma determinada medida, como indicado na Figura 2.1.

Vamos ver a seguir como escrever corretamente cada um desses campos.

2.2 Algarismos significativos

Como o próprio nome diz, eles são os algarismos que significam algo, que trazem alguma informação. Por exemplo, imagine que você está caminhando pela rua e pergunta a hora a

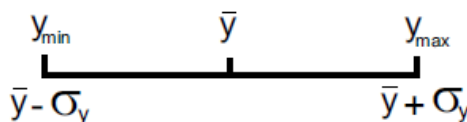


Figura 2.1: Representação gráfica de $y = (\bar{y} \pm \sigma_y)$. A medida realizada corresponde ao intervalo indicado.

alguém com um relógio de pulso analógico. Essa pessoa dá uma olhada rápida no relógio, enquanto caminha, e responde: são 11 horas, 42 minutos e 34 segundos. Você acha que é possível que essa leitura tenha sido realmente feita? Claro que não! Certamente os quarenta e dois minutos já são uma estimativa: o ponteiro dos minutos provavelmente estava entre o 8 e o 9, ou seja é algo entre 40 e 45 minutos. Então, essa informação sobre os segundos não tem qualquer significado. Dizemos que esse algarismo que foi estimado, o 2, é um **algarismo duvidoso**. Os outros algarismos são **algarismos certos**: certamente a pessoa não leu 11 em vez de 12 ou 10, ou qualquer outro valor de hora, por exemplo. Os algarismos certos e os duvidosos são os **algarismos significativos da medida**. Quanto maior for o número de algarismos significativos em uma medida, mais informação ela traz.

Numa **medida direta** feita com instrumentos análogos o número de algarismos significativos reflete a menor divisão da unidade representada no instrumento de medida ou a menor variação percebida pelo instrumento. No caso do instrumento digital escrevemos a medida até o último dígito indicado. Numa **medida indireta** veremos mais à frente que o número de algarismos significativos da medida depende de como foi calculada e das incertezas das medidas envolvidas no cálculo.

Um ponto que sempre gera dúvida é se os zeros são significativos ou não. Para responder pense em alterar as unidades da medida. Se o número de zeros mudar ao fazer essa alteração, eles não são significativos, já que indicam apenas em que unidades estamos escrevendo a medida. Vamos ver como isso funciona examinando alguns exemplos.

Exemplo 1.1

- $\bar{y}_1 = 2,47$ cm tem três algarismos significativos sendo o 7, duvidoso. Para escrever $\bar{y}_1$ em metros caminhamos a vírgula para a esquerda duas casas decimais e completamos com zeros. Nada foi feito em termos de alterar a quantidade de informação em $\bar{y}_1$, apenas trocamos as unidades, logo esses zeros de preenchimento não são significativos. Em resumo, as duas formas abaixo são equivalentes e têm três algarismos significativos:

$$\bar{y}_1 = \underbrace{2,47}_{sig} \text{ cm} = 0,0 \underbrace{247}_{sig} \text{ m}.$$

- A mudança para uma unidade menor pode ser feita com a ajuda de potências de dez, que não contam como algarismos significativos. Por exemplo a medida y_2 , com dois algarismos significativos pode ser escrita nas formas equivalentes:

$$\bar{y}_1 = 0, \underbrace{52}_{sig} \text{ kg} = 0, \underbrace{52}_{sig} \times 10^3 \text{ g} = \underbrace{5,2}_{sig} \times 10^2 \text{ g}.$$

- Já os zeros ao final do número são significativos e devem ser sempre escritos. Se escrevermos uma medida como $\bar{y}_3 = 3,10$ s, ficará implícito que temos certeza dos três segundos e do um décimo de segundo. O zero na casa dos centésimos de segundo é duvidoso, sendo o último significativo. Observe mais um exemplo:

$$\underbrace{100}_{sig} \text{ m} = 0, \underbrace{100}_{sig} \text{ km} = \underbrace{1,00}_{sig} \times 10^8 \mu\text{m}.$$

2.3 Precisão e exatidão

Vimos que a quantidade de algarismos significativos em uma medida indica o quanto a conhecemos e que, por convenção, o último algarismo escrito é duvidoso ¹. Vamos ver agora como quantificar a dúvida nesse algarismo significativo. Para tal vamos definir duas grandezas importantes, que serão utilizadas para determinar a qualidade de uma determinada medida $x = (\bar{x} \pm \sigma_x)$:

- Precisão $\rightarrow$ relacionada a incerteza σ_x
- Exatidão $\rightarrow$ relacionada ao valor esperado $\bar{x}$. Em textos mais antigos o termo acurácia é usado.

Estes indicadores podem ser utilizados para medidas diretas e indiretas.

2.3.1 As fontes de incerteza

A incerteza em uma medida vem das limitações no processo de medida e de erros aleatórios, que podem ser minimizados mas não removidos. Os principais tipos de incerteza são:

1. **Precisão do instrumento:** todo instrumento de medida tem limitações, ou seja, medidas realizadas com um determinado instrumento só serão conhecidas até uma determinada fração da unidade de medida. Por exemplo, quando usamos uma boa régua metálica para medir a largura de uma barra, se as arestas da barra forem bem definidas e se for fácil a manipulação da barra será possível fazer a medida com precisão de 0,5 mm, o que significa dividir visualmente a menor divisão da régua, igual a um milímetro, por dois. Um exemplo diferente é o de instrumentos digitais. Se nada for dito, a precisão será dada pela última casa informada pelo instrumento, caso esse dígito se mantenha constante. Se for observada alguma flutuação do valor mostrado, ela deve ser estimada e passará a ser a precisão da medida. Por exemplo, se num cronômetro digital o menor valor de tempo indicado no visor for 0,01 s, um determinado intervalo de tempo medido com ele só poderá ser escrito até o centésimo de segundo.
2. **Erro aleatório ou acidental:** este é proveniente do processo de medida. Dizemos que a grandeza que queremos medir tem seu **valor verdadeiro**, algo idealizado, do qual só podemos nos aproximar. Ao realizarmos a medição sempre haverá variações aleatórias imperceptíveis nas condições de medida tais que, se a repetirmos, encontraremos valores diferentes entre si. Um exemplo típico é a medida de um intervalo de tempo por acionamento de um cronômetro. Um ser humano sempre estará cometendo erros aleatórios provenientes do atraso ou adiantamento no acionamento do cronômetro.

Na prática observamos uma combinação de várias fontes de incerteza. Assim ao fazermos uma medida direta devemos sempre observar o instrumento, verificando sua limitação e adequação ao experimento, e definir um protocolo de medição que minimize flutuações aleatórias. Por exemplo, se usamos uma régua metálica graduada em milímetros para

¹Esta convenção na verdade significa escrever a incerteza com um algarismo significativo, o que corresponde à maioria das situações experimentais. Entretanto, há casos em que o elevado número de medições, feitas em condições extremamente controladas, e o tratamento estatístico dos dados experimentais permitem que se escreva a incerteza com dois algarismos significativos. Neste caso os dois últimos algarismos da medida serão duvidosos.

medir o diâmetro de uma esfera, será impossível estimar qualquer fração de milímetro, pela dificuldade em se justapor a régua à esfera. Assim, um mesmo instrumento pode gerar leituras com incertezas diferentes, dependendo do que está sendo medido.

Incertezas e algarismos significativos

Normalmente usamos um ou dois algarismos significativos para representar as incertezas, dependendo do grau de estimativa envolvido na sua determinação. Como vamos trabalhar com muitas estimativas na determinação das incertezas nas medidas diretas, usaremos a convenção de um significativo para a incerteza. Assim, o valor da medida deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza, como nos exemplos abaixo.

$$L = (2,25 \pm 0,05) \text{ cm}, \quad M = (351 \pm 2) \times 10^{-2} \text{ kg}.$$

Incerteza relativa e precisão

A incerteza relativa de uma medida é definida como

$$R = \left| \frac{\delta_y}{\bar{y}} \right|.$$

Seu valor revela quanto uma determinada medida é precisa: **quanto menor o valor da incerteza relativa, mais precisa é a medida**. Note que R é uma grandeza adimensional e por isso permite que medidas com diferentes unidades sejam comparadas. Mais frequentemente R é escrita na forma de porcentagem. Não existe uma regra fixa para o número de significativos na representação de R , em geral usamos de um a dois significativos para essa grandeza. É importante notar que o valor absoluto da incerteza isoladamente não é suficiente para qualificarmos a precisão de uma medida. Por exemplo, reportar a distância entre Rio e São Paulo com incerteza de um metro certamente é muito bom. Por outro lado, dar o comprimento de um carro com incerteza de um metro é muito ruim. Qual a diferença? No primeiro caso, estamos falando de uma dúvida de um metro em cerca de 500 km e no segundo caso, a incerteza é de um metro em cerca de 4 metros.

Exemplo 1.2: Vamos comparar as medidas abaixo com relação à precisão. Os resultados foram escritos com um algarismo significativo usando critérios que serão definidos mais adiante, na Seção 2.4.1.

$$\begin{array}{ll} m_1 = (0,00064 \pm 0,00003) \text{ kg} & R_1 = \left| \frac{0,00003}{0,00064} \right| = 0,041 = 0,05 = 5 \% \\ m_2 = (3245 \pm 1) \text{ m/s} & R_2 = \left| \frac{1}{3245} \right| = 0,00031 = 0,0003 = 0,03 \% \\ m_3 = (0,000643 \pm 0,000007) \text{ km} & R_3 = \left| \frac{0,000007}{0,000643} \right| = 0,011 = 0,01 = 1 \% \\ m_4 = (25,3 \pm 0,1) \text{ cm} & R_4 = \left| \frac{0,1}{25,3} \right| = 0,0039 = 0,004 = 0,4 \% \end{array}$$

Temos, assim, que

$$R_1 > R_3 > R_4 > R_2.$$

Chamando de P_i a precisão da i -ésima medida, temos que

$$P_2 > P_4 > P_3 > P_1.$$

2.3.2 Erro sistemático

Este é o tipo de erro que aparece quando usamos aparelhos de medida mal calibrados, como uma balança que indique um valor de massa diferente de zero quando não há nenhum objeto sobre seu prato de medida, ou por um procedimento experimental realizado sem a devida atenção, como a medição do comprimento de uma mesa usando uma régua começando da marcação de 1,0 cm. Esses erros são erros grosseiros e devemos estar atentos quanto à calibração dos instrumentos de medida e aos procedimentos experimentais utilizados, de modo a evitá-los ou corrigi-los posteriormente.

Exemplo 1.3: Numa experiência sobre o pêndulo físico, são estudadas as oscilações de uma barra perfurada em torno de um eixo que passa por um dos furos, como indicado na Figura 2.2 (a). No decorrer da experiência precisamos medir a distância h entre o centro de massa da barra e o eixo de oscilação. Nesta montagem específica o eixo tem uma seção reta triangular de forma a minimizar a área de contato entre o eixo e a superfície interna do orifício e, portanto, minimizar a perda de energia por atrito. A Figura 2.2 (b) mostra a forma correta de se medir o h como definido no modelo. Um erro frequentemente cometido é o de medir do centro de massa até a parte inferior do orifício, medida h_{medido} na figura. Todos os valores de h_{medido} serão sistematicamente menores do que h levando a vários outros erros no decorrer da análise dos dados.

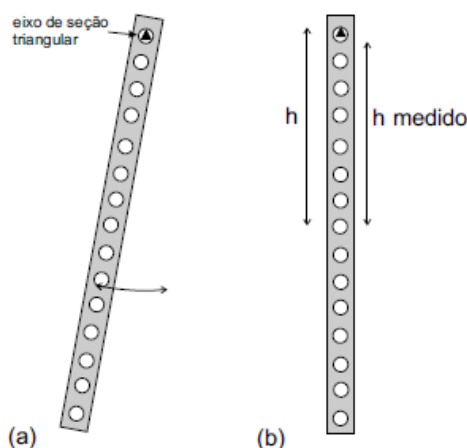


Figura 2.2: (a) Oscilação de uma barra perfurada em torno de um eixo de seção triangular. (b) h é medida que corretamente corresponde à distância entre eixo de oscilação e o centro de massa. A medida realizada, h_{medido} , é sistematicamente menor do que h .

2.3.3 Discrepância relativa

Os erros sistemáticos afetam o valor da medida, mas não sua incerteza. Muitas vezes desejamos comparar medidas com algum padrão tomado como referência. Essa comparação é feita através do cálculo da **discrepância relativa** definida como:

$$D = \left| \frac{\bar{y} - y_{ref}}{y_{ref}} \right|.$$

Assim, **quanto menor a discrepância relativa, mais exata é a medida.**

Quanto ao número de algarismos significativos para expressar D , também não há uma regra. Como é mais comum escrever D na forma de porcentagem, em geral usamos de 1 a

2 significativos para essa grandeza.

Exemplo 1.4: Suponha que se queira estudar a propagação de ondas sonoras em diferentes gases e que para tal seja necessário medir a velocidade de propagação dessas ondas no gás escolhido. Depois de montada a experiência é necessário realizar experimentos de calibração, comparando o valor medido com o tabelado, $v_{ref} = (343,2 \pm 0,1)$ m/s. No primeiro desses experimento foi medido o valor $v_1 = (35 \pm 1) \times 10$ m/s. Considerando-se que o intervalo da medida é entre 34×10 m/s e 36×10 m/s, vemos que o valor tabelado está incluído. Note que a precisão desse valor medido é muito ruim. O valor de referência tem quatro algarismos significativos e o medido, apenas dois. Isso torna a comparação sem sentido. Depois de revisar e corrigir a montagem e o procedimento, a experiência é repetida levando a $v_2 = (348,6 \pm 0,2)$ m/s. A precisão melhorou muito, temos quatro algarismos significativos agora, mas não há concordância com o valor tabelado. O intervalo do valor medido não tem qualquer superposição com o tabelado. Para corrigir a experiência os possíveis erros sistemáticos foram procurados e corrigidos. O resultado após a segunda correção foi $v_3 = (343,4 \pm 0,2)$ m/s. Agora sim faz sentido comparar os resultados em termos de discrepância. Temos:

$$D = \left| \frac{343,4 - 343,2}{343,2} \right| = 5,8 \times 10^{-4} = 0,058\%.$$

Precisão e exatidão são duas qualidades desejadas em uma medida, mas são propriedades completamente diferentes. Podemos visualizar isso através da imagem de um alvo que foi atingido por diversos dardos, jogados por atiradores com habilidades bem diferentes. A Figura 2.3 mostra algumas imagens características.

2.4 Medidas indiretas e propagação de incerteza

A situação mais frequente na vida real é aquela em que precisamos calcular uma grandeza a partir dos valores de diversas medidas diretas. Um exemplo simples é a medida da velocidade de um objeto. Temos que realizar duas medidas diretas, distância e tempo, e calcular a velocidade que será uma medida indireta. O valor calculado deve ser escrito de acordo com as regras que vimos até aqui, por isso precisamos saber como calcular o valor esperado e a incerteza da medida indireta a partir dessas grandezas das medidas diretas e também da relação matemática que será usada. Dizemos que as incertezas das medidas diretas propagam-se através do cálculo da incerteza desejada.

Exemplo 1.5: Vamos considerar uma situação simplificada. Queremos calcular uma área retangular e para tanto medimos os dois lados do retângulo obtendo $a = a \pm \delta_a$ e $b = b \pm \delta_b$. Queremos escrever a área como $A = ab = \bar{A} \pm \delta_A$.

Definimos:

$$\bar{A} = \bar{a}\bar{b}.$$

Pode-se mostrar que uma Equação que leve em conta a distribuição de valores no intervalo da medida, é

$$\left(\frac{\delta_A}{\bar{A}} \right)^2 = \left(\frac{\delta_a}{\bar{a}} \right)^2 + \left(\frac{\delta_b}{\bar{b}} \right)^2.$$

Numa situação mais geral temos que calcular o valor de w que é dado por uma função f de x, y e z : $w = f(x, y, z)$. Vamos supor que x, y e z sejam independentes entre si. Sabendo que $x = \bar{x} \pm \delta_x$, $y = \bar{y} \pm \delta_y$ e $z = \bar{z} \pm \delta_z$ temos que,

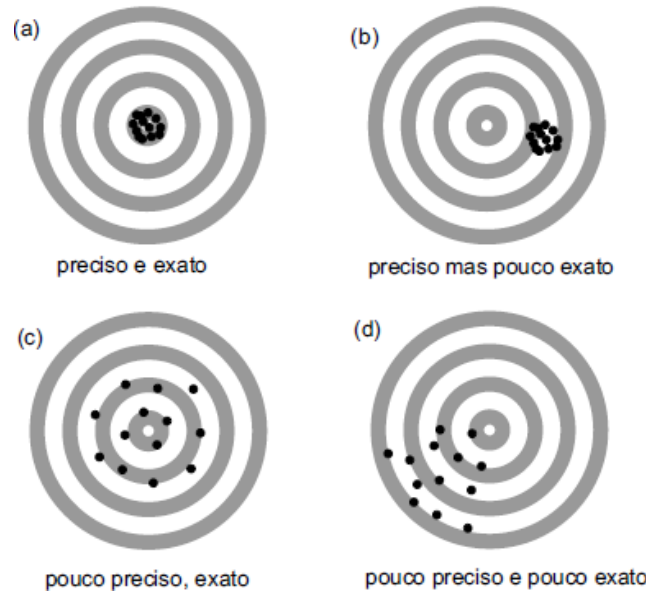


Figura 2.3: (a) Excelente atirador, concentrou seus dardos no centro do alvo. (b) Este atirador tem algum problema sistemático de mira. Os dardos estão concentrados, indicando boa precisão, mas sistematicamente desviados para a direita e para baixo. (c) Este atirador tenta mandar o dardo no centro mas erros aleatórios o fazem atirar de forma dispersa, com pouca precisão. Os dardos estão simétricos com relação ao centro, o que indica que a mira não tinha qualquer desvio sistemático apreciável. (d) Este último atirador está mal! Manda os dardos em direções muito diferentes e com erro sistemático para baixo e para a esquerda.

$$\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.2)$$

e

$$\delta_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta_x\right)_{\bar{w}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta_y\right)_{\bar{w}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta_z\right)_{\bar{w}}^2}. \quad (2.3)$$

O símbolo ∂ significa a **derivada parcial**, ou seja, numa função de muitas variáveis será a derivada apenas com relação a uma delas. As outras variáveis comportam-se como constantes neste caso. O índice $\bar{w}$ indica que as derivadas devem ser calculadas em $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ e $z = \bar{z}$.

Exemplo 1.6: Se $f = a^2b^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2ab^3,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 3a^2b^2.$$

O conceito de derivada parcial é explorado em Cálculo II.

A Tabela 2.1 mostra as expressões para as funções que serão usadas em Física Experimental II.

Função f	$\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{y})$	Incerteza
$x \pm y$	$\bar{x} \pm \bar{y}$	$\delta_w^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2$
$ax + by$	$a\bar{x} + b\bar{y}$	$\delta_w^2 = (a\delta_x)^2 + (b\delta_y)^2$
xy ou x/y	$\bar{x}\bar{y}$ ou $\bar{x}/\bar{y}$	$\left(\frac{\delta_w}{\bar{w}}\right)^2 = \left(\frac{\delta_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_y}{\bar{y}}\right)^2$
$x^n y^m$	$\bar{x}^n \bar{y}^m$	$\left(\frac{\delta_w}{\bar{w}}\right)^2 = \left(n\frac{\delta_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(m\frac{\delta_y}{\bar{y}}\right)^2$

Tabela 2.1: Expressões de incerteza propagada para funções mais comuns.

Exemplo 1.7: Suponha que um determinado ângulo θ foi medido com incerteza δ_θ e deseja-se calcular $a = g \sin \theta$, onde $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$. Para escrever a na forma $a \pm \delta_a$ devemos calcular a propagação das incertezas de g e θ no resultado final. Para isso calculamos

$$(\delta_a)^2 = \left[\frac{\partial(g \sin \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \delta_\theta^2 + \left[\frac{\partial(g \sin \theta)}{\partial g} \right]^2 \delta_g^2 = (\bar{g} \cos \bar{\theta})^2 \delta_\theta^2 + (\sin \bar{\theta})^2 \delta_g^2.$$

2.4.1 Algarismos significativos e arredondamentos

Depois de calcular a incerteza propagada, devemos ser cuidadosos ao escrever corretamente o resultado da medida indireta. A incerteza propagada deve ser escrita com um algarismo significativo e o valor da grandeza calculada deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza. Nesse processo vamos nos deparar com a necessidade de arredondar tanto a incerteza quanto o valor da medida.

Para arredondar um determinado valor, vamos adotar os critérios da norma técnica da Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT-5891:

1. Quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo inferior a 5, permanece inalterado o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6357 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,6);
2. Quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6678 torna-se 1,7 e 1,6505 torna-se 1,7, arredondados à primeira casa decimal);
3. Se o algarismo à seguida do algarismo a ser conservado for igual a 5 e não houver mais nenhum algarismo à sua direita ou se todos os algarismos à direita forem zeros, retira-se todos os algarismos posteriores ao que será conservado e :
 - (a) Adiciona-se uma unidade ao algarismo conservado, se este for ímpar;
 - (b) Permanece inalterado o algarismo conservado, se este for par.

Exemplo 1.8: Vamos calcular o peso p da massa $m = (234,00 \pm 0,02) \text{ g}$ sabendo que $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$. Vamos trabalhar no SI, portanto escrevemos $m = (234,44 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg}$. Com isso,

$$\bar{p} = \bar{m}\bar{g} = 2,29428376 \text{ N}.$$

Agora vamos calcular a incerteza. Como temos um produto,

$$\left(\frac{\delta_p}{\bar{p}}\right)^2 = \left(\frac{\delta_m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_g}{\bar{g}}\right)^2 = \left(\frac{0,02}{234,00}\right)^2 + \left(\frac{0,0001}{9,7879}\right)^2 = 7,409 \times 10^{-10}$$

Logo,

$$\delta_p = 2,29428376N \times 2,72 \times 10^{-5} = 6,23 \times 10^{-5} \text{ N.}$$

Agora escrevemos a incerteza calculada com uma algarismo significativo

$$\delta_p = 6 \times 10^{-5} \text{ N.}$$

Finalmente escrevemos $\bar{p}$ até a quinta casa decimal, usando o critério de arredondamento, e escrevemos o resultado final:

$$2,29428376N \rightarrow p = (2,29428 \pm 0,00006) \text{ N.}$$

Claro que também poderíamos usar a Equação 2.3 para calcular a incerteza absoluta. Neste caso,

$$\delta_p = \sqrt{(\bar{m}\delta_g)^2 + (\bar{g}\delta_m)^2}.$$

Exemplo 1.9: Observe os arredondamentos abaixo, feitos de modo que a medida tenha 3 algarismos significativos:

- $x = 4,678 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$ (critério 1)
- $y = 4,674 \text{ m} \rightarrow y = 4,67 \text{ m}$ (critério 2)
- $z = 4,675 \text{ m} \rightarrow z = 4,68 \text{ m}$ (critério 3 (a))
- $w = 4,665 \text{ m} \rightarrow w = 4,66 \text{ m}$ (critério 3 (b))

Regra de bolso para algarismos significativos Muitas vezes o cálculo da incerteza propagada pode ser bem longo e fica difícil de saber se o resultado está certo ou não. Uma forma simples de saber se pelo menos a ordem de grandeza da incerteza propagada está correta é usar a seguinte regra:

- Numa operação matemática envolvendo medidas com diferentes números de algarismos significativos o resultado terá aproximadamente o mesmo número de algarismos significativos que a medida com menor número.

Exemplo 1.10 Vamos calcular o volume V de um tubo de seção reta quadrada de lado $a = (1,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ e comprimento $L = (120,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. A medida a tem 2 algarismos significativos e L , 4, sendo a mais precisa. Assim esperamos que V tenha entre 2 e 4 algarismos significativos. Vamos fazer a propagação:

$$V = a^2 L \rightarrow \bar{V} = \bar{a}^2 \bar{L} = 120,0 \text{ cm}^3.$$

$$\left(\frac{\delta_V}{\bar{V}}\right) = \sqrt{\left(\frac{2\delta_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_L}{\bar{L}}\right)^2} = 0,200001736.$$

Um erro muito comum é esquecer que 0,200001736 é a incerteza relativa e escrever este valor como se fosse a incerteza absoluta, levando a um resultado de volume com 5 algarismos significativos, mais preciso do que todas as medidas usadas no seu cálculo, o que é um absurdo.

Calculando corretamente a incerteza absoluta, temos:

$$\delta_V = \bar{V} \left(\frac{\delta_V}{\bar{V}} \right) = (120,0 \text{ cm}^3)(0,200001736) = 24 \text{ cm}^3.$$

Finalmente,

$$V = (12 \pm 2) \times 10 \text{ cm}^3.$$

O resultado final tem dois algarismos significativos, como a medida menos precisa usada no cálculo. Se for necessário melhorar a precisão da medida de V , vale a pena medir a com mais precisão.

2.5 Bibliografia

[1] Fundamentos da Teoria de Erros, José Henrique Vuolo. Edgar Blücher Ltda. (1992).

Experimento 1

3	Empuxo e Densidade	23
3.1	Introdução	
3.2	Modelo	
3.3	Materiais	
3.4	Procedimento Experimental	
3.5	Análise de Dados	

A close-up, warm-toned photograph of a person wearing safety glasses, focused on adjusting a complex industrial machine with various pipes and valves. The person's hand is visible, interacting with a component of the machinery.

3. Empuxo e Densidade

3.1 Introdução

Na mecânica dos fluidos, estudamos as forças sobre um fluido e seus efeitos em diversas condições. Na hidrodinâmica, por exemplo, estamos interessados em saber o comportamento de um fluido em movimento quando sujeito a certas forças. Já a hidrostática compreende a mecânica dos fluidos em repouso. Na hidrostática, em particular, uma das perguntas relevantes que podemos fazer é qual a força que um fluido em repouso exerce sobre um sólido imerso ou parcialmente imerso no fluido. Nessa prática, nosso objetivo será estudar experimentalmente justamente esse tipo de força, conhecida como empuxo.

Como não temos acesso direto à força de contato entre o sólido e o fluido, na tentativa de descobrir propriedades qualitativas e quantitativas da força empuxo, faz-se necessário lançar mão de uma medida indireta. A ideia do experimento a ser realizado está ilustrado na Figura 3.1. Nosso sistema consiste em uma proveta graduada e parcialmente preenchida por um líquido de densidade ρ , uma balança sobre a qual colocamos a proveta e uma barra metálica presa a um suporte, que pode ser inserida no líquido de forma controlada.

A principal ideia por trás do experimento é que a leitura de massa indicada em uma balança é na verdade obtida em termos da força exercida pelo objeto sobre o prato da balança. Quando a barra estiver imersa no fluido, a reação do empuxo atuará sobre o líquido, de forma que a força que o recipiente exercerá sobre o prato será modificada, dependendo explicitamente do empuxo.

É natural pensar que a diferença entre as forças que atuam sobre o prato na situação (b) e na situação (a) é dada exatamente pela força empuxo, de forma que medir os valores de V e M nos fornecerá informações sobre o empuxo e sua dependência com o volume de fluido deslocado pela barra. Também podemos (e iremos) verificar se o empuxo depende de alguma propriedade do sólido imerso, como sua composição e forma.

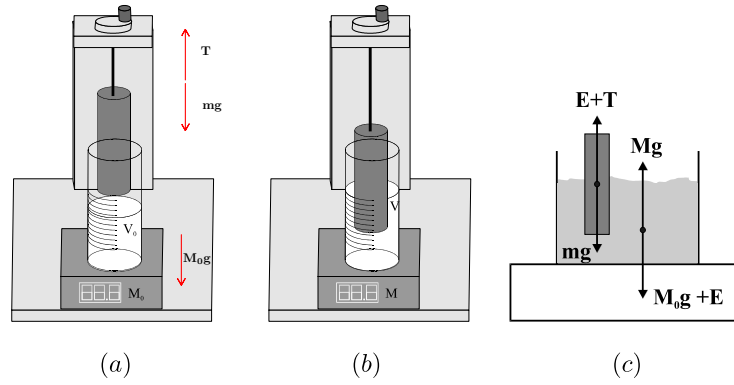


Figura 3.1: (a) Proveta contendo um certo volume de líquido em repouso sobre uma balança. O sistema é mostrado antes e (b) depois da barra ser parcialmente imersa no líquido. (c) Diagrama das forças que atuam sobre a barra e sobre o líquido, após imersão parcial. *Barra metálica fora do líquido:* a tensão T no suporte da barra equilibra seu peso mg . A leitura de volume corresponde ao volume do líquido, V_0 , e a leitura de massa na balança, M_0 , corresponde à soma das massas do líquido e do recipiente. *Barra metálica parcialmente imersa no líquido:* a barra desloca o líquido, resultando em outra leitura de volume, denotada por V . O líquido exerce uma força para cima sobre a barra, denotada por E , cuja reação atua sobre o líquido e tem sentido oposto. Como a balança mede a massa em termos da força que o recipiente exerce sobre a balança, obtemos uma nova leitura de massa, M .

3.2 Modelo

Vamos agora tentar entender o experimento à luz do que sabemos de mecânica e hidrostática. Como já discutido, a Figura 3.1 ilustra o aparato experimental que utilizaremos. Na configuração (a), a força sobre a balança, i.e., a reação da força normal sobre o recipiente, equilibra o sistema recipiente + líquido, de forma que

$$F_0 = M_0g, \quad (3.1)$$

onde F_0 é a força que atua sobre a balança, M_0 é a massa do recipiente somada à massa do líquido e g é a aceleração da gravidade. Quando a barra metálica é parcialmente inserida no líquido, passam a existir forças entre o líquido e a barra. Na situação estática, apenas as forças de pressão contribuem para a força resultante, já que a força devido à viscosidade do líquido depende de uma velocidade relativa entre a barra e o fluido. A soma das forças de pressão que um líquido exerce sobre um sólido é chamada empuxo e é dada por:

$$E = \rho V_d g, \quad (3.2)$$

onde ρ é a densidade do líquido e V_d é o volume de líquido deslocado pelo sólido. Na situação indicada na Figura 3.1(b), a força empuxo tem sentido para cima. Para descobrir a relação entre a leitura M na balança e o empuxo, precisamos nos atentar para o fato de que a balança mede a força F exercida no prato pelo recipiente, de forma que $Mg = F$. Portanto, tentaremos a partir de agora obter essa força. Para isso, note que a segunda lei de Newton aplicada ao sistema líquido + proveta resulta em:

$$F = E + M_0g. \quad (3.3)$$

onde utilizamos também a terceira lei de Newton para obter a força normal que atua sobre o recipiente (dada em módulo por F) e a força que a barra exerce sobre o líquido (dada em módulo por E). Como $F = M \cdot g$, obtemos

$$E = (M - M_0) \cdot g. \quad (3.4)$$

Por outro lado, o volume de líquido deslocado é dado por $V_d = V - V_0$, de forma que pela Equação 3.2,

$$E = (V - V_0) \cdot \rho \cdot g \quad (3.5)$$

Substituindo a Equação 3.4 em 3.5, obtemos:

$$M = \rho \cdot V + (M_0 - \rho \cdot V_0), \quad (3.6)$$

ou

$$V = \frac{M}{\rho} + (V_0 - \frac{M_0}{\rho}). \quad (3.7)$$

Note que o modelo teórico prevê que o empuxo não depende de nenhuma propriedade do sólido, apenas do volume imerso no líquido, como podemos observar pela Equação 3.2. As expressões 3.6 e 3.7 mostram uma relação linear entre M e V , do tipo $y = ax + b$, onde a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear.

Enquanto na Equação 3.6 o coeficiente angular representa a densidade do líquido, na Equação 3.7 ele representa o inverso da densidade. Da mesma forma, o coeficiente linear na Equação 3.6 nos permite obter o valor de $M_R = M_0 - \rho V_0$.

3.3 Materiais

- Proveta graduada;
- Balança;
- Barras metálicas de diferentes materiais e seções retas;
- Água;
- Suporte com manivela para movimentação da barra metálica.

3.4 Procedimento Experimental

Inicialmente, deverão ser feitos os seguintes procedimentos:

- Realize a medição da massa do recipiente sem o líquido, que denotaremos por M_R ;
- Verifique a graduação da proveta e anote o valor da menor divisão;
- Para garantir a acurácia da leitura de volume a partir do nível do líquido, verifique se o suporte onde ficará a balança está nivelado.
- Faça uma leitura do nível com o líquido a ser estudado. Determine qual será a incerteza associada às medidas de volume;
- Para garantir um número adequado de medidas, com diferentes valores de V , a proveta não poderá ser muito preenchida com o líquido. Controle a quantidade de líquido na proveta de tal forma que seja possível inserir toda a barra sem transbordamento do líquido.

Para verificar a dependência do empuxo com diferentes propriedades do sólido imerso, faremos medidas com diferentes barras metálicas. Realize a leitura de M_o e V_o , i.e., uma leitura de volume e massa com a barra metálica totalmente fora do líquido. Posteriormente, use a manivela para baixar a barra até observar uma pequena porção submersa.

Adiantamos que, por conta das novas forças presentes, a imersão da barra irá desequilibrar a balança e inclinar a proveta. Portanto, primeiro equilibre a balança, lendo M_1 , depois leia o novo volume do líquido, V_1 . É importante tomar cuidado para que a barra não encoste na proveta.

Após a primeira medida, baixe a barra um pouco mais, nivele a balança, leia M_2 , V_2 e repita o procedimento mais algumas vezes. Nessa prática, realizaremos 5 medições com uma barra e mais 5 com outra barra. Por razões que ficarão mais evidentes adiante, com a segunda barra faremos apenas leituras de volume igual ou maior que o último volume medido com a primeira barra, V_5 .

3.5 Análise de Dados

Após realizar o experimento com ambos os líquidos e diferentes tipos de barras, será possível fazer tabelas semelhantes a forma indicada abaixo.

Líquido:			Barra:	
$M_R =$				
$M_0 =$				
$V_0 =$				
i	$(M_i \pm \delta M_i) \text{ g}$	$\frac{\delta M_i}{M_i}$	$(V_i \pm \delta V_i) \text{ ml}$	$\frac{\delta V_i}{V_i}$
1				
2				
3				
4				
...				
10				

- Inicialmente, identifique na tabela quais são os parâmetros que são obtidos de forma direta e indireta.
- No relatório, crie um apêndice mostrando como determinou os resultados das medidas indiretas e suas respectivas incertezas.
- Iremos usar a Equação 3.5 ou 3.6 para determinar a densidade do líquido. Sabemos que estas são do tipo $y = ax + b$, o que nos permite fazer um gráfico de $M \times V$ ou $V \times M$ e, em seguida, realizar um ajuste de reta com os dados experimentais para determinar o valor do coeficiente angular e linear. Antes de fazer o gráfico, devemos examinar as colunas $\frac{\delta M}{M}$ e $\frac{\delta V}{V}$. Como o ajuste é realizado tendo como base o método dos mínimos quadrados, é preciso saber qual é a variável mais precisa entre M e V , para que a associemos ao eixo x. Assim, os possíveis ajustes são da forma:

$$M = a \cdot V + b, \quad (3.8)$$

ou

$$V = a \cdot M + b. \quad (3.9)$$

- Faça um gráfico com os dados obtidos para a água, inserindo no mesmo gráfico os pontos correspondentes às diferentes barras (diferencie no gráfico os pontos referentes a cada barra). Há diferença de comportamento do gráfico quando mudamos a barra? Verifique se a dependência entre M e V é linear.
- Realize um ajuste linear, do tipo $y = a \cdot x + b$, ou seja, um ajuste de reta no gráfico.
- A partir do ajuste linear, determine a densidade do líquido e compare com o valor esperado.

IV

Experimento 2

4	Pêndulo Simples	29
4.1	Introdução	
4.2	Modelo	
4.3	Material	
4.4	Procedimento Experimental	
4.5	Análise dos dados	
4.6	Bibliografia	

A photograph of a man wearing safety glasses, working on a complex industrial machine with many pipes and valves. The scene is dimly lit with a warm, orange-brown color cast. A semi-transparent orange banner is overlaid at the bottom of the image, containing the chapter title.

4. Pêndulo Simples

4.1 Introdução

O movimento de rotação da Terra é uma espécie de "cronômetro" [1]. As posições instantâneas do Sol no céu durante o dia, ou de algumas estrelas no céu noturno, são capazes de nos fornecer alguma orientação temporal. Se o clima estiver bom, relógios solares podem marcar intervalos de tempo durante o dia como uma sequência de posições da sombra de sua cunha. Embora dispositivos de "cronometragem" de diversas naturezas - como relógios d'água, velas acesas ou ampulhetas - possuam uma história de milênios, durante muito tempo pode-se dizer que precisão não era uma prioridade, lembrando que as relações sociais eram, sobretudo, locais.

Provavelmente ninguém sabe quando pêndulos surgiram no pensamento humano. No entanto, é razoável supor que eles foram objetos de interesse a partir do momento em que a humanidade percebeu que era preciso satisfazer certas necessidades básicas rotineiramente, introduzindo uma maneira de se dividir o tempo em intervalos regulares.

Neste experimento, observaremos o movimento de um pêndulo simples, composto por um fio longo e inextensível de comprimento L e massa desprezível e uma esfera maciça de raio Δ e massa m , estudando a dependência de seu período de oscilação com o comprimento efetivo do fio, $L + \Delta$. Com os dados coletados, obteremos uma medida indireta da aceleração da gravidade g .

4.2 Modelo

Um pêndulo simples é composto de um objeto preso a um fio de comprimento L conforme a Figura 4.1.

Na figura temos:

- θ é a posição angular do pêndulo como indicado na figura.
- L é o comprimento do fio.
- Δ é a distância do centro de massa do objeto preso ao fio até a base do fio.

Geralmente nos cursos de física teórica, o objeto preso ao fio tem dimensões desprezíveis,

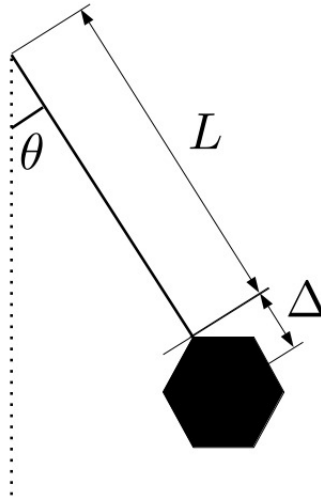


Figura 4.1: Pêndulo simples

mas este não é caso para este experimento. Vamos considerar que o centro de massa do objeto está a uma distância Δ da ponta desse fio.

Sobre este objeto teremos duas forças: a tensão ($\vec{T}$) no fio e a força peso ($\vec{P}$). A tensão sempre apontará na direção paralela ao fio que, por sua vez, é paralelo ao vetor posição ($\vec{r}$) do objeto em relação ao eixo de rotação, ou seja, o torque dessa força será nulo. Já a força peso aponta na direção vertical para baixo e pode ser decomposta em duas componentes: uma tangente à trajetória ($\vec{P}_t$) e outra perpendicular à trajetória ($\vec{P}_p$), conforme a figura abaixo.

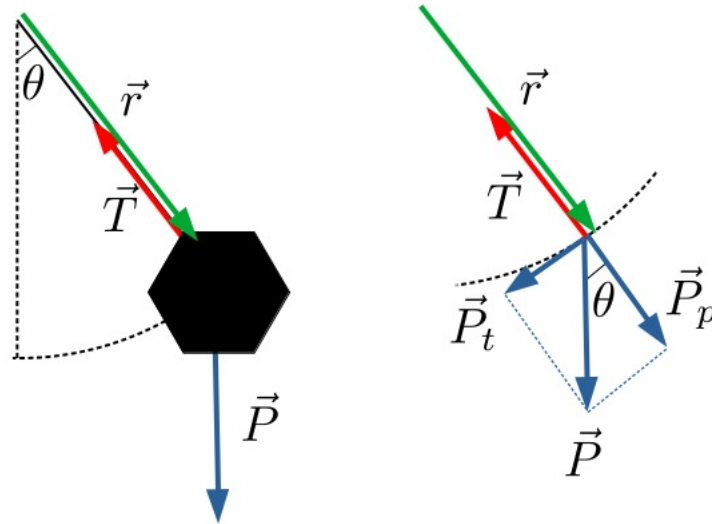


Figura 4.2: Diagrama de forças

Os módulos das componentes do peso são dadas por

$$P_t = P \cdot \sin \theta = mg \cdot \sin \theta \quad (4.1)$$

$$P_p = P \cdot \cos \theta = mg \cdot \cos \theta. \quad (4.2)$$

A componente perpendicular à trajetória do peso não irá exercer torque pois é paralela ao vetor posição. Já a componente tangente à trajetória exercerá torque. Como essa componente é perpendicular ao vetor posição e o módulo de $\vec{r}$ é $L + \Delta$, o torque é dado por:

$$\tau = -P_t \cdot (L + \Delta) = -mg \cdot \sin \theta \cdot (L + \Delta). \quad (4.3)$$

O sinal de menos aparece por que a tendência desse torque é fazer com que o objeto se mova para a posição de equilíbrio (torque restaurador).

Se escrevermos a segunda lei de Newton para a rotação deste objeto, teremos:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \cdot (L + \Delta) \cdot \sin \theta, \quad (4.4)$$

onde I é o momento de inércia desse objeto em relação ao eixo de rotação. Pelo teorema dos eixos paralelos teremos:

$$I = I_{CM} + m(L + \Delta)^2, \quad (4.5)$$

onde I_{CM} é o momento de inércia do objeto em relação ao seu centro de massa. Como usaremos objetos com geometrias complicadas é difícil determinar o valor de I_{CM} . O que podemos fazer é escrever o momento de inércia em relação ao centro de massa como

$$I_{CM} = mk^2, \quad (4.6)$$

onde k é chamado de raio de giração.

Substituindo esses resultado na Equação 4.4,

$$\left(mk^2 + m(L + \Delta)^2 \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg(L + \Delta) \sin \theta, \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g(L + \Delta)}{k^2 + (L + \Delta)^2} \sin \theta = 0. \quad (4.8)$$

Para amplitudes de movimento pequenas podemos fazer a seguinte aproximação

$$\sin \theta \approx \theta. \quad (4.9)$$

De forma que a Equação 4.8 fica

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g(L + \Delta)}{k^2 + (L + \Delta)^2} \theta = 0. \quad (4.10)$$

Essa é a equação do oscilador harmônico simples (OHS). Desta equação podemos identificar que a frequência angular é dada por

$$\omega^2 = \frac{g(L + \Delta)}{k^2 + (L + \Delta)^2}. \quad (4.11)$$

E como o período é dado por $T = 2\pi/\omega$, então teremos que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + (L + \Delta)^2}{g(L + \Delta)}}. \quad (4.12)$$

Para a análise dos nossos dados iremos reescrever essa equação da seguinte forma

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{k^2 + (L + \Delta)^2}{g(L + \Delta)} = \frac{L + \Delta}{g} + \frac{k^2}{g(L + \Delta)},$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L + \Delta}{g} \left(1 + \frac{k^2}{(L + \Delta)^2} \right). \quad (4.13)$$

Repare que não temos uma Equação linear $y = ax + b$. Para observarmos um comportamento linear em relação ao comprimento do fio, nós teremos que planejar o nosso experimento de forma que o terceiro termo da equação acima seja desprezível. Isso acontecerá se o raio de giração k desse objeto for bem menor que o comprimento do fio L). Para satisfazer essa condição, nós teremos que usar um objeto pequeno, o menor possível.

Então, se $L \gg k$, podemos desprezar o segundo termo entre parênteses na Equação 4.13 e obteremos uma equação linear em T

$$\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = \frac{L}{g} + \frac{\Delta}{g}. \quad (4.14)$$

Observamos agora que essa última equação é do tipo $y = ax + b$ e portanto, podemos utilizá-la para realizar um ajuste de reta em um gráfico contendo dados do período e comprimento do fio.

4.3 Material

- Cronômetro (pode ser do próprio celular ou um programa no computador do laboratório);
- Barbante ou fio com pelo menos 1 m de comprimento;
- Régua (maior possível);
- Paquímetro;
- Esfera de aço inoxidável ou um objeto de dimensões pequenas e pesado suficiente para garantir que o fio esteja completamente esticado;

4.4 Procedimento Experimental

Meça o diâmetro da esfera e prenda-a no fio. Pendure o fio com a esfera em um suporte que esteja suficientemente fixo. Certifique-se de que o fio esteja completamente esticado.

Faça o pêndulo oscilar com uma amplitude pequena (no máximo em torno de 10 graus). Certifique-se que o pêndulo oscila sem dificuldades e o amortecimento seja desprezível (a amplitude não diminui significativamente com o tempo).

Para cada comprimento do fio, meça o tempo total (T') correspondente a 5 oscilações consecutivas, por pelo menos 5 vezes ($N = 5$) cada comprimento.

- Comprimento do fio: Meça o comprimento do fio, a partir do centro de rotação até o ponto em que o fio está amarrado ao objeto. Caso tenha uma régua menor que o tamanho do barbante/fio, faça a medida por partes e determine o erro propagado.
- Período: coloque o seu pêndulo para oscilar e observe o movimento e certifique-se que a oscilação esteja ocorrendo de forma adequada. Meça o tempo total de 5 períodos de oscilação consecutivos e anote seus resultados. A princípio, a incerteza de cada medida seria a incerteza instrumental (no caso do cronômetro, a menor escala), mas é necessário levar em conta erros aleatórios na medida, principalmente por causa do tempo de resposta humano ao usar o cronômetro.

4.5 Análise dos dados

Médias de período - Para cada comprimento L , você terá um conjunto com 5 medidas ($N = 5$) de tempo T' . Cada medida de T' nos permite determinar um valor de T_0 , que é o período do pêndulo ($T_0 = T'/5$). Podemos agora determinar qual o valor mais provável de T_0 , para um dado comprimento (L) do fio, a partir de uma média:

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N}, \quad (4.15)$$

onde $N = 5$. O desvio padrão é dado por:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}{N - 1}}, \quad (4.16)$$

e a incerteza do valor médio do período T é:

$$\delta\bar{T} = \frac{\delta}{\sqrt{N}}. \quad (4.17)$$

onde $\bar{T}$ é a média desses valores.

Faça uma tabela com os dados experimentais obtidos direta e indiretamente, tome como exemplo a tabela a seguir:

i	$(L_i \pm \delta L_i) \text{ cm}$	$[(\bar{T}/2\pi)^2 \pm \delta(\bar{T}/2\pi)^2] \text{ s}^2$
1		
2		
3		
4		
..		
10		

- Se necessário, crie um apêndice demonstrando como obteve os valores da tabela;
- Construa o gráfico $(\bar{T}/2\pi)^2 \times L$ em papel milimetrado;
- Faça o ajuste linear dos pontos, $y = a \cdot x + b$;
- A partir do ajuste, determine o valor da aceleração da gravidade g e do raio da esfera Δ ;
- Compare os valores obtidos para g e Δ com os valores previstos.

4.6 Bibliografia

- [1] Michael R. Matthews, Colin F. Gauld and Arthur Stinner. The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives. Springer Netherlands, 1st, (2005).
 [2] M. Turkyilmazoglu, Improvements in the approximate formulae for the period of the simple pendulum. European Journal of Physics, 31(5),1007, (2010).



Experimento 3

5	Oscilador Harmônico Simples	35
5.1	Introdução	
5.2	Modelo	
5.3	Material	
5.4	Procedimento Experimental	
5.5	Análise de Dados	
5.6	Bibliografia	



5. Oscilador Harmônico Simples

5.1 Introdução

Oscilações são encontradas em todos os campos da Física. Diversos sistemas exibem um comportamento oscilatório, como o pêndulo simples (estudado na prática anterior), cordas de instrumentos musicais e colunas de ar em instrumentos de sopro e até a corrente elétrica alternada de que nos servimos para ligar nossos equipamentos eletrônicos diariamente. Mesmo a luz que permite que você leia esse roteiro é composta por oscilações do campo eletromagnético que se propagam a altíssima velocidade.

As chamadas oscilações harmônicas são aquelas que podem ser descritas por uma função seno ou cosseno. O adjetivo harmônico se origina do fato de que os sons harmônicos musicais correspondem a movimentos de um certo meio material descritos por combinações das funções seno e cosseno. Esse tipo de oscilação é muito importante e aparece em diversos sistemas, sendo capaz de descrever uma variedade enorme de fenômenos. Além disso, pode-se mostrar que, na grande maioria dos casos, uma partícula localizada em uma posição de equilíbrio estável oscila harmonicamente em torno dessa posição após sofrer uma pequena perturbação. Tudo isso serve de grande motivação para estudarmos esse assunto em detalhe tanto do ponto de vista teórico como experimental.

Nessa prática, estudaremos experimentalmente as oscilações harmônicas em sistemas massa-mola, i.e., sistemas compostos por um objeto massivo preso a uma mola de constante elástica k .

5.2 Modelo

A equação de movimento para o nosso sistema massa-mola de massa total M é:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + Mg \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{M} y = g \quad (5.2)$$

a solução da Equação 5.2 tem a forma:

$$y(t) = y_0 + A_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (5.3)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/M}$, A_0 é amplitude de oscilação ao redor da posição de equilíbrio e ϕ é uma constante de fase.

Para o nosso sistema massa-mola, podemos obter a dependência do período com a massa, pois $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Assim:

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2} = \frac{M}{k} \quad (5.4)$$

onde $M = (m + m_s) + m_k$ (m_s é a massa do suporte e m_k é a massa da mola).

5.3 Material

- Suporte vertical;
- Recipiente/Suporte para as massas;
- Diferentes massas;
- Régua;
- Mola;
- Sistema de coleta de dados composto por webcam e software.

5.4 Procedimento Experimental

Inicialmente você deverá fazer uma medida para estimar a constante elástica da mola por um método estático. Para realizar este experimento, você deverá medir a variação de comprimento da mola para duas massas diferentes.

- Coloque uma massa m_1 dentro do recipiente. Em condição estática, ou seja, sem a mola estar oscilando, meça o comprimento da mola y_1 . Em seguida, repita o procedimento para uma massa m_2 , determinando agora y_2 .
- Repita o procedimento pelo menos 5 vezes com diferentes valores de m_i

No método dinâmico, você colocará o sistema para oscilar, com uma amplitude pequena. Nosso objetivo nessa experiência é tentar entender a dependência do período de oscilação do sistema massa-mola nas propriedades da mola e na massa do sistema. Para isso, realizaremos medidas do movimento do sistema para diferentes valores de massa m_i . A tomada de dados necessita de alguns cuidados muito importantes.

Primeiro, note que a elasticidade da mola depende da sua forma espiral. É desejável que essa propriedade seja mantida em todas as medidas, de forma que a mola não pode ser muito distendida ou comprimida. Em outras palavras, é necessário um cuidado para que o movimento do sistema seja de pequenas amplitudes de oscilação em torno da posição de equilíbrio. Além disso, desejamos estudar oscilações harmônicas em uma dimensão e, portanto, devemos evitar qualquer movimento na horizontal. Uma boa maneira de conseguir isso é movimentar o porta massas um pouco para cima e soltá-lo a partir do repouso. Como o programa também registra o movimento na horizontal, é possível utilizá-lo para certificar-se de que a massa apenas oscilou na vertical.

Para começar, escolha o menor valor de massa para o qual é possível observar oscilações e realize uma medida. Acrescente mais massa ao suporte para realizar as medidas subsequentes (pode variar a massa em intervalos de 10 g por exemplo). Salve os dados correspondentes a cada um dos valores de massa em uma pasta no computador (indexe cada arquivo com o valor da massa utilizada).

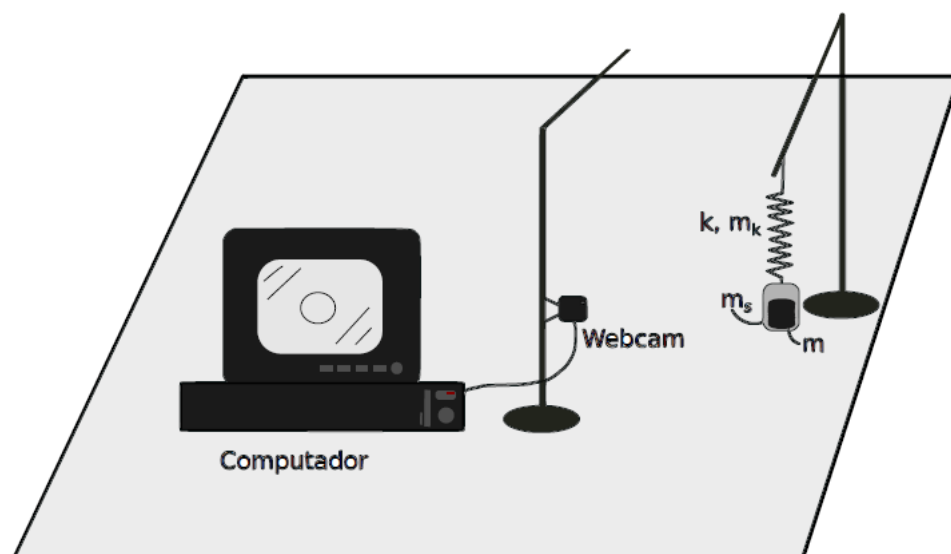


Figura 5.1: Exemplo de tabela no Qtiplot com os dados coletados pelo software e Webcam.

- Meça a massa da mola, m_k ;
- Meça a massa do suporte, m_s ;
- Com a mola no suporte vertical, verifique para quais valores de massa é possível observar oscilações harmônicas. Isso vai depender da dureza da mola utilizada. Tome cuidado para não deformar a mola devido ao excesso de peso sobre a mesma. De forma geral, uma boa recomendação é não ultrapassar 100 g.
- Fixe a webcam no outro suporte de forma que possa capturar todo o movimento oscilatório do porta-massas. Alinhe o sistema e realize os ajustes necessários no programa de aquisição e processamento de imagem conforme descrito no apêndice B;
- Puxe o porta-massas por uma distância a partir do ponto de equilíbrio e solte-o. Verifique se o sistema apresenta um comportamento oscilatório no eixo vertical. Caso também seja observado um movimento no plano horizontal muito acentuado, você deverá verificar a causa e tentar diminuir ao máximo esse movimento;
- Com o sistema oscilando, colete dados por no máximo 15-20 s.

5.5 Análise de Dados

A constante elástica pode ser obtida através da condição estática medindo o alongamento da mola para diferentes massas acopladas à mola. Na condição de equilíbrio estático temos que:

$$m_1 \cdot g = k \cdot y_1 \quad (5.5)$$

$$m_2 \cdot g = k \cdot y_2 \quad (5.6)$$

logo:

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta y} \cdot g = \frac{m_2 - m_1}{y_2 - y_1} \cdot g \quad (5.7)$$

- calcule k_i para diferentes pares de (m, y) e, a partir destes, determine o valor mais provável de k .

$$\bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^N k_i}{N} \quad (5.8)$$

- Usando o Qtiplot, faça um gráfico de $y(t)$ em função do tempo. Com este gráfico, faça um ajuste não linear de uma curva conforme a equação 5.3, que pode ser re-escrita como:

$$y(t) = y_0 + A_0 \sin\left(\frac{2\pi(t - t_0)}{T}\right) \quad (5.9)$$

Note que essa função representa oscilações harmônicas. Os valores de y_0 , A_0 , t_0 e T podem ser estimados pelo gráfico, como indicado na Figura 5.2 e são boas entradas para o ajuste. Utilize a ferramenta Data-Screen Reader para obter estes valores.

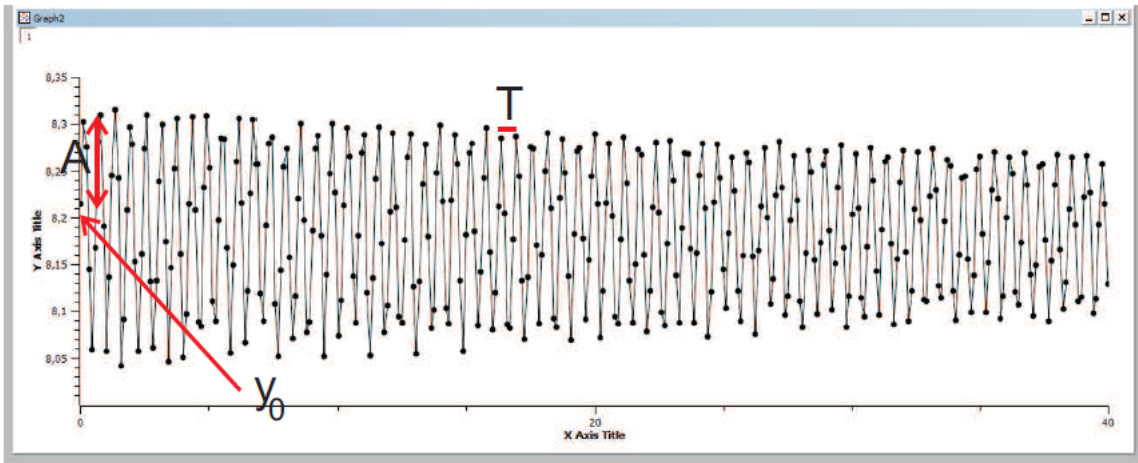


Figura 5.2: Exemplo de tabela no Qtiplot com os dados coletados pelo software Webcam.

5.6 Bibliografia

- Fundamentos de Física, Halliday-Resnick-Walker (Vol.2). LTC (2023).
- Física Básica. H.M. Nussenzveig (Vol.2). Edgar Blücher (2014).



Experimento 4

6	Oscilador Harmônico Amortecido	40
6.1	Introdução	
6.2	Modelo	
6.3	Material	
6.4	Procedimento Experimental	
6.5	Análise de Dados	
6.6	Bibliografia	



6. Oscilador Harmônico Amortecido

6.1 Introdução

Neste experimento continuaremos a tratar o oscilador harmônico, mas agora temos como objetivo o estudo do amortecimento das amplitudes de oscilação do sistema massa-mola em função do tempo. Você deve ter observado no experimento anterior que após iniciado, a amplitude diminui até que o sistema massa-mola para de oscilar após um determinado tempo.

6.2 Modelo

A equação de movimento para um sistema de oscilador harmônico amortecido pode ser escrita da seguinte forma:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \beta v + Mg, \quad (6.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\beta}{M} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{M} y = g, \quad (6.2)$$

onde β é o coeficiente de amortecimento.

Podemos reescrever esta última equação como:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g. \quad (6.3)$$

onde $\gamma = \frac{\beta}{2M}$ é a constante de amortecimento. A solução desta equação tem a forma:

$$y(t) = y_0 + A(t) \sin(\omega t + \phi), \quad (6.4)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (6.5)$$

e

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t},$$

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau} \quad (6.6)$$

onde $\tau = 1/\gamma$.

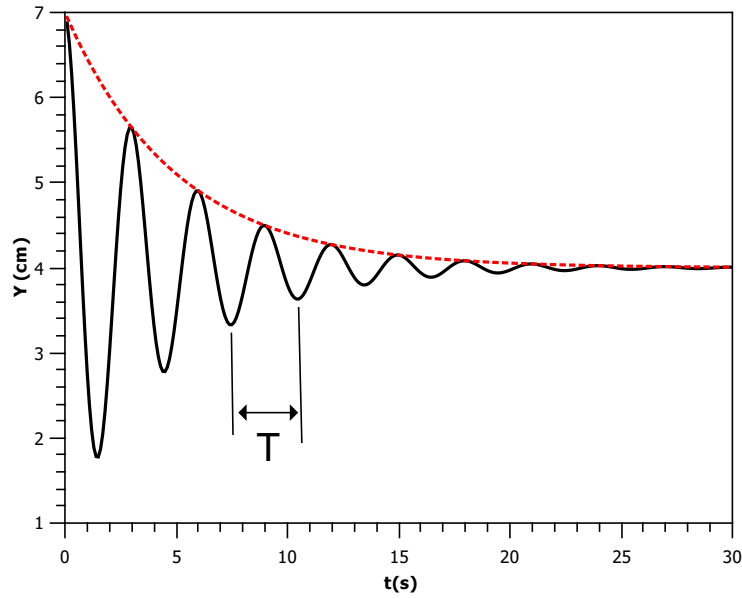


Figura 6.1: Exemplo de função descrita pela Equação 6.3, com $y_0 = 4$ cm, $A = 3$ cm, $\phi = 0$, $T = 3$ s e $\tau = 5$ s. A curva pontilhada vermelha é dada pela Equação 6.6.

Note que agora temos um movimento oscilatório onde a amplitude decai com o tempo, ou seja, o movimento é amortecido, como mostrado na Figura 6.1. Em nosso experimento, esperamos que esse amortecimento seja pequeno, colocando o sistema para oscilar no regime que denominamos de sub-crítico, que ocorre quando $\gamma < \omega_0$.

Na Equação 6.6 vemos que uma das características do sistema amortecido é sua amplitude que é descrita por uma função que decai exponencialmente com o tempo, a partir de uma amplitude inicial A_0 . O parâmetro τ é denominado tempo de relaxação e é uma constante do sistema massa-mola amortecido. Podemos interpretar o tempo de relaxação como sendo o tempo necessário para que a amplitude do sistema tenha uma redução de aproximadamente 63% do valor inicial. Isso fica claro se fizermos $t = \tau$ na equação anterior:

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau} = A_0 e^{-1} = \frac{A_0}{e} \simeq 0,37 A_0. \quad (6.7)$$

Outra constante que podemos determinar nesse sistema massa-mola amortecido é o tempo de meia-vida $t_{1/2}$, que é o tempo necessário para que a amplitude caia a metade do seu valor inicial.

$$A(t = t_{1/2}) = A_0 e^{-t_{1/2}/\tau}, \quad (6.8)$$

como

$$A(t = t_{1/2}) = \frac{A_0}{2},$$

então:

$$A_0/2 = A_0 e^{-t_{1/2}/\tau},$$

$$\frac{1}{2} = e^{-t_{1/2}/\tau}.$$

Finalmente, obtemos que o tempo de meia-vida é dado por:

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln(2). \quad (6.9)$$

Um ponto importante dos modelos (simples e amortecido) é a hipótese de que a massa da mola seja desprezível. Do ponto de vista dinâmico isso pode ser bastante complicado, pois agora não conhecemos todas as forças que atuam sobre o sistema. No entanto, podemos tentar entender de forma efetiva o papel da massa da mola em um modelo simplificado. Para tal, vamos fazer algumas considerações sobre a mola e depois calcular a energia cinética E do sistema, que agora deve depender também de m_k . A energia cinética do sistema tem dois termos, um referente à massa presa à mola, E_M , e outro referente à própria mola, E_k . Seja V a velocidade da massa M , temos:

$$E_M = \frac{1}{2} M V^2. \quad (6.10)$$

Para calcular E_k devemos considerar que cada parte da mola possui uma velocidade diferente. A ponta que está fixa ao suporte tem velocidade nula, já a ponta que está presa à M oscila com velocidade V . Como a velocidade varia ao longo da mola? Podemos supor a variação mais simples possível, a linear: $v(y) = a \cdot y$. O coeficiente a pode ser determinado usando o fato de que a velocidade na extremidade da mola presa à M tem velocidade V . Denotando o comprimento da mola por L , obtemos:

$$\begin{aligned} v(L) &= aL = V, \\ v(y) &= ay = \frac{V}{L}y. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Supondo que a densidade da mola seja $\mu = m_k/L$, cada porção da mola de comprimento dy tem massa $dm = (\frac{m_k}{L})dy$ e energia cinética:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (dm) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_k}{L} \left(\frac{V}{L}y\right)^2 dy, \\ E_k &= \frac{1}{2} \frac{m_k V^2}{L^3} \int_0^L y^2 dy, \\ E_k &= \frac{1}{2} \frac{m_k}{3} V^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Com isso, a energia cinética total pode ser escrita como:

$$E = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m_k}{3}\right) V^2. \quad (6.13)$$

Note que essa Equação para energia cinética é a mesma de um sistema massa-mola simples onde a massa na extremidade é dada por $M + m_k/3$. Dizemos portanto que a mola

contribui para a energia cinética do sistema como uma massa efetiva dada por $m_k/3$. Essa mesma contribuição deve aparecer no período do oscilador, no entanto, se usarmos uma mola suficientemente leve esta contribuição será desprezível. Devemos lembrar que esse é um modelo bastante simplificado e, portanto, não necessariamente acurado. Todavia, modelos mais realistas fornecem resultados próximos ao obtido aqui (em geral a massa efetiva varia entre $m_k/2$ e $m_k/3$).

6.3 Material

- Suporte vertical;
- Recipiente para as massas (porta-massa) com disco amortecedor;
- Massa entre 20 e 40 g;
- Mola;
- Sistema de coleta de dados por webcam e software.

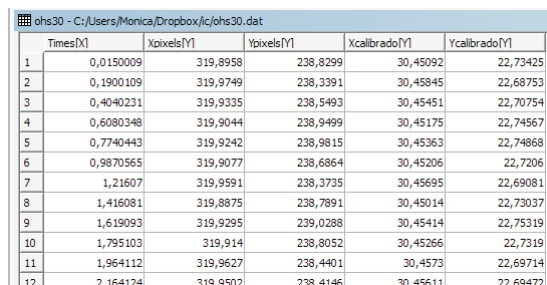
6.4 Procedimento Experimental

Coloque uma massa entre 20 e 40 g no recipiente e acople-o a uma mola. Em seguida, pendure o sistema massa-mola no suporte vertical. Alinhe a webcam, execute o programa de coleta de dados e proceda da mesma forma que no experimento anterior para a configuração dos parâmetros no software.

Para este experimento, dependendo do material usado, esperamos encontrar um tempo de relaxação entre 15 e 40 s. Assim, é aconselhável que a coleta de dados tenha uma duração $2\tau < t < 3\tau$ (entre 2τ e 3τ).

6.5 Análise de Dados

Com os dados coletados, carregue-os no QtiPlot para fazer o gráfico da posição (eixo y) *versus* tempo (eixo x).



	Times[X]	Xpixels[Y]	Ypixels[Y]	Xcalbrado[Y]	Ycalbrado[Y]
1	0,0150009	319,8958	238,8299	30,45092	22,73425
2	0,1900109	319,9749	238,3391	30,45845	22,68753
3	0,4040231	319,9335	238,5493	30,45451	22,70754
4	0,6080348	319,9044	238,9499	30,45175	22,74567
5	0,7740443	319,9242	238,9815	30,45363	22,74868
6	0,9870565	319,9077	238,6864	30,45206	22,7206
7	1,21607	319,9591	238,3735	30,45695	22,69081
8	1,416081	319,8875	238,7891	30,45014	22,73037
9	1,619093	319,9295	239,0288	30,45414	22,75319
10	1,795103	319,914	238,8052	30,45266	22,7319
11	1,964112	319,9627	238,4401	30,4573	22,69714
12	2,164124	319,9507	238,4146	30,45611	22,69477

Figura 6.2: Exemplo de tabela no Qtiplot com os dados coletados pelo software e Webcam.

O QtiPlot permite fazer um ajuste não linear para a função que descreve a posição do sistema em função o tempo. A Equação 6.4 que pode ser re-escrita como

$$y(t) = y_0 + A_0 e^{-\gamma t} \sin(2\pi \frac{[t - t_0]}{T}), \quad (6.14)$$

onde T é o período de oscilação e t_0 é o instante inicial.

Proceda da mesma forma que no experimento do OHS, agora usando como função de ajuste a Equação 6.14, para obter o valor de τ e, a partir deste, o valor do tempo de meia-vida $t_{1/2}$.

Uma outra forma de análise é fazer o gráfico das amplitudes A versus tempo. As amplitudes A_i são aquelas quando $y(t)$ apresentam máximos e/ou mínimos, ou seja, quando $\sin(2\pi \frac{t-t_0}{T}) = \pm 1$. Utilizando a função data-reader do QtiPlot, obtenha os valores A_i e t_i e monte uma nova tabela. Faça o gráfico de A versus t . Fazendo:

$$y(t) - y_0 = A_0 e^{-\gamma t} \quad (6.15)$$

Podemos, a partir da Equação 6.15, ajustar uma função exponencial aos dados experimentais ou mesmo linearizar a equação.

$$\ln(y(t) - y_0) = \ln(A_0) - \gamma t \quad (6.16)$$

Vemos que a Equação 6.16 é do tipo $y = b + a \cdot x$, ou seja, uma equação de reta onde $b = \ln(A_0)$ e $a = -\gamma = -1/\tau$.

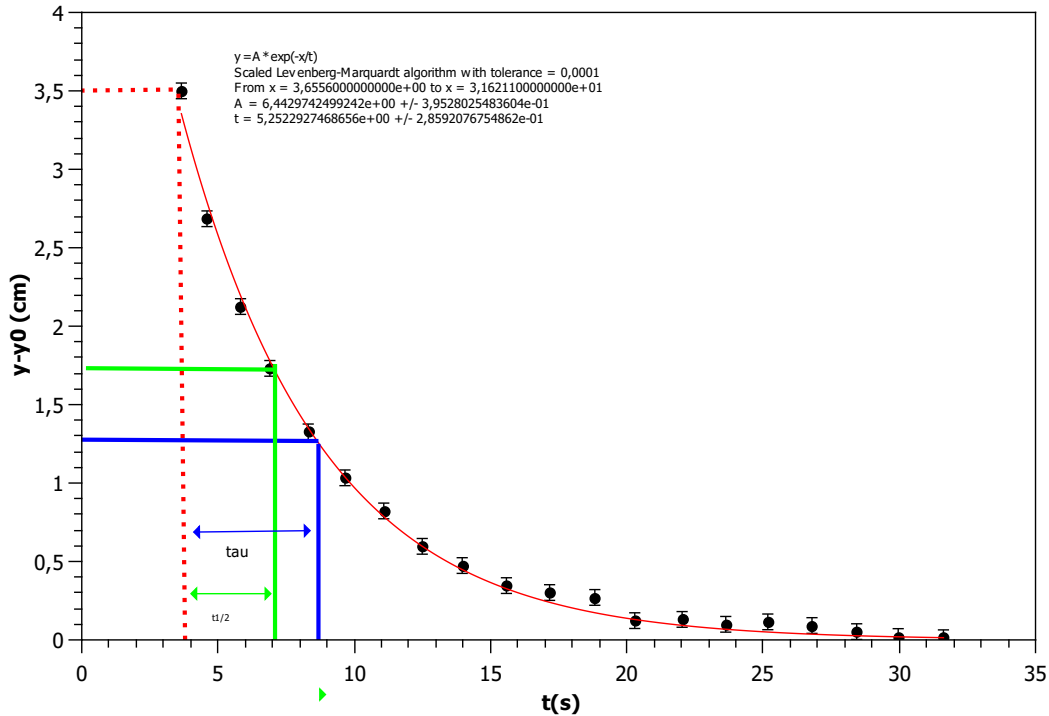


Figura 6.3: Gráfico de amplitudes em função do tempo. A linha vermelha é o ajuste da função definida pela Equação 6.15. A linha pontilhada em vermelho marca a amplitude inicial, $A_0 = 3.5$ cm e o tempo inicial ($t_0 = 3,9$ s). Em verde, no eixo y, é a marcação para $0,5A_0$ e, no eixo x, o tempo de meia-vida ($t_{1/2}$). Em azul, no eixo y, é marcação para $0,37A_0$ e, no eixo x, o tempo de relaxação (τ). Em detalhe, os dados calculados pelo QtiPlot para o ajuste exponencial, mostrando que $A(t = 0) = (6,4 \pm 0,4)$ cm e $\tau = (5,2 \pm 0,3)$ s.

6.6 Bibliografia

- [1] H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica 2 - Fluídos, Oscilações, Ondas e Calor. Edgard Blucher, 2002.
- [2] Rodríguez, E. E., Gesnouin, G. A.. Effective mass of an oscillating spring. The Physics Teacher, 45(2), 100-103, 2007.



Experimento 5

7	Corda vibrante	46
7.1	Introdução	
7.2	Modelo	
7.3	Materiais	
7.4	Procedimento Experimental	
7.5	Análise de Dados	
7.6	Bibliografia	



7. Corda vibrante

7.1 Introdução

O estudo de fenômenos ondulatórios, que abordaremos neste experimento, está diretamente ligado a um dos conceitos mais fundamentais da física: o conceito de onda. De forma geral, uma onda pode ser definida como uma perturbação que se propaga através do espaço ou de um meio material, transportando energia sem o transporte direto de matéria. Um clássico exemplo de onda mecânica é aquela gerada em uma corda esticada quando uma de suas extremidades é submetida a um impulso. Ao sacudir a corda para cima e para baixo, cria-se um movimento oscilatório perpendicular à direção de propagação da onda. Esse tipo de onda, em que a vibração ocorre perpendicularmente à direção de propagação, é denominado *onda transversal*.

Além das ondas mecânicas, outro importante exemplo de ondas transversais são as ondas eletromagnéticas, como a luz e as ondas de rádio. Nesse caso, os campos elétrico e magnético oscilam perpendicularmente à direção de propagação da onda, permitindo que ela se propague até mesmo no vácuo.

As ondas mecânicas, que por sua vez, dependem de um meio material para se propagar, tem sua velocidade determinada pelas propriedades de inércia e elasticidade do meio. Dois fenômenos importantes associados à propagação de ondas são a *reflexão* e a *refração*, que ocorrem quando uma onda encontra uma mudança no meio de propagação, resultando em alterações na sua direção e velocidade.

As ondas podem ser classificadas como *propagantes* ou *estacionárias*. Ondas estacionárias ocorrem, por exemplo, quando uma corda com extremidades fixas vibra em modos específicos, conhecidos como *modos normais de vibração*. Neste experimento, estudaremos as ondas transversais em uma corda tensionada, com atenção especial à formação de ondas estacionárias. Para isso, utilizaremos uma corda presa em ambas as extremidades e excitada por uma haste vibratória acoplada a um gerador de frequência. Essa configuração nos permitirá simplificar o sistema para um caso unidimensional, facilitando a análise de grandezas como comprimento de onda, frequência e velocidade de propagação.

Além disso, investigaremos o fenômeno de refração em uma corda segmentada, composta

por dois trechos com densidades lineares diferentes. Esse estudo nos permitirá compreender como a mudança nas propriedades do meio afeta a propagação da onda. O experimento está dividido em duas partes principais:

1. *Formação de ondas estacionárias em uma corda única:* Nesta etapa, observaremos os modos normais de vibração da corda e determinaremos a velocidade de propagação da onda, v , a partir das relações entre comprimento de onda, frequência e tensão aplicada.
2. *Refração em uma corda segmentada:* Aqui, uniremos duas cordas com densidades lineares distintas para analisar o fenômeno de refração e determinar o índice de refração entre os dois meios.

7.2 Modelo

Vamos rever alguns detalhes importantes sobre a propagação de ondas transversais. Nosso modelo considera que o movimento se dá no plano xy , com a corda ao longo do eixo x . Um pequeno deslocamento vertical y numa corda submetida a uma tensão T provoca a propagação de uma onda $y(x, t)$ cuja forma mais geral é:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (7.1)$$

sendo $f(x - vt)$ uma onda progressiva que se propaga no sentido positivo do eixo x com velocidade v , e $g(x + vt)$ uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo x , também com velocidade v .

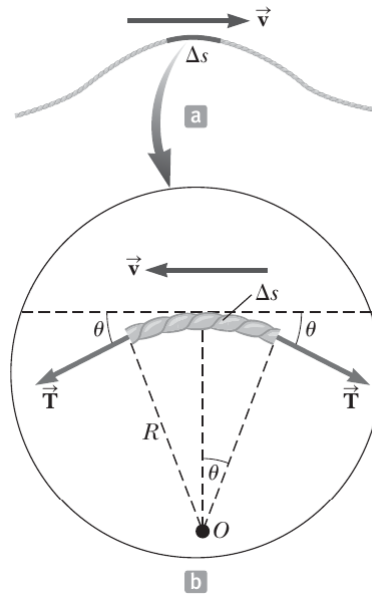


Figura 7.1: (a) No referencial da Terra, um pulso na corda se move para a direita com velocidade v . (b) No referencial se movendo para a direita com o pulso, o elemento de comprimento Δs se move para a esquerda com velocidade v , de forma que o pulso pareça estar em repouso.

Vamos agora, por meio de uma análise mecânica, obter uma expressão para a velocidade de um pulso propagando-se por uma corda esticada com tensão T . Considere um pulso que se move para a direita com velocidade uniforme v , medida em relação a um sistema de

referência inercial estacionário em relação à Terra, como mostrado na Figura 7.1(a). Se as Leis de Newton são válidas em qualquer sistema de referência inercial, podemos ver este pulso a partir de um referencial inercial diferente, que se move com o pulso, na mesma velocidade, de forma que o pulso pareça estar em repouso no referencial, como na Figura 7.1(b). Nesse sistema de referência o pulso permanece fixo e cada elemento da corda se move para a esquerda através da forma do pulso. Um elemento pequeno da corda, de comprimento Δs , forma o arco aproximado de um círculo de raio R , como mostrado na vista ampliada da Figura 7.1(b). Esse elemento tem uma aceleração centrípeta de v^2/R , que é fornecida por componentes da força T cujo módulo é a tensão da corda. A força T atua em cada lado do elemento, tangente ao arco. Os componentes horizontais da força T se cancelam, e cada componente vertical, $T \sin \theta$, atua para baixo. Assim, o módulo da força radial total no elemento é $2T \sin \theta$. Como o elemento é pequeno, θ é pequeno, então podemos utilizar a aproximação $\sin \theta \approx \theta$. Por consequência, o módulo da força radial total é

$$F_r = 2T \sin \theta \approx 2T\theta.$$

O elemento tem massa $m = \mu \Delta s$, onde μ é a massa por unidade de comprimento da corda. Como o elemento faz parte de um círculo, $\Delta s = R(2\theta)$, portanto,

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta.$$

Aplicando a segunda lei de Newton a esse elemento, na direção radial, temos

$$F_r = m \frac{v^2}{R} \rightarrow 2T\theta = 2\mu R\theta \frac{v^2}{R}.$$

Resolvendo para v , temos:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (7.2)$$

Nesta prática sendo $T = Mg$ a tensão provocada na corda pelo peso de uma massa M . Em nosso experimento vamos gerar ondas na corda fazendo com que uma de suas extremidades oscile, com pequena amplitude, numa determinada frequência, ao ser conectada a uma haste vertical que execute um movimento harmônico. O movimento da haste é provocado pela conexão eletro-mecânica com um gerador de frequências. Este equipamento nos permite escolher o tipo de movimento e a frequência. Nesta prática vamos gerar ondas harmônicas, ou seja, do tipo seno ou cosseno. Supondo que a corda seja semi-infinita, a conexão com o gerador causaria a propagação de um onda progressiva da forma:

$$y(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \phi], \quad (7.3)$$

onde A é a amplitude da onda, ϕ é a constante de fase e k é o número de onda. A constante de fase ϕ depende dos valores iniciais de y e $\frac{\partial y}{\partial t}$ num determinado ponto. O significado do número de onda fica claro quando impomos as periodicidades espacial e temporal. Imagine que tiremos uma foto da corda num determinado instante de tempo $t = t_0$. Nessa foto veríamos a forma harmônica com periodicidade dada pela condição:

$$y(x, t_0) = y(x + \lambda, t_0),$$

ou

$$\cos[k(x + vt_0) + \phi] = \cos[k(x + \lambda - vt_0) + \phi] \rightarrow \cos[kx + \phi'] = \cos[k(x + \lambda) + \phi'],$$

onde $\phi' = \phi - kvt_0$. Para que a condição acima seja satisfeita para qualquer valor de x devemos ter $k\lambda = 2\pi$, ou

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (7.4)$$

A periodicidade temporal pode ser analisada pela observação do movimento harmônico de um ponto da corda, na posição $x = x_0$. Neste caso teríamos:

$$y(x_0, t) = y(x_0, t + \tau),$$

ou

$$\cos[k(x_0 - vt) + \phi] = \cos[k(x_0 - v(t + \tau)) + \phi] \longrightarrow \cos[kvt - \phi''] = \cos[kv(t + \tau) - \phi''],$$

onde $\phi'' = \phi + kx_0$. Para que a condição acima seja satisfeita para qualquer valor de t devemos ter que $k\tau = 2\pi$. Lembrando que a frequência f é dada por $1/T$ e usando a definição de λ , Equação 7.4, temos que:

$$v = \lambda f. \quad (7.5)$$

Esta relação entre a velocidade, o comprimento de onda e a frequência será bastante explorada nesta prática. Em nosso experimento vamos considerar a corda fixa nas duas extremidades. Supondo que uma das extremidades esteja em $x = 0$ e a outra em $x = L$, as condições de contorno ficam:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0. \quad (7.6)$$

O fato de termos uma corda finita faz com que seja possível a formação de ondas estacionárias devidas à interferência construtiva entre as ondas incidente e refletida. Neste caso todos os elementos da corda oscilam com a mesma frequência angular $\omega = 2\pi f$ e a mesma fase ω . Cada ponto x da corda oscila com a mesma dependência temporal $\cos(\omega t)$, mas com uma amplitude $A(x)$. Neste caso as partes espacial e temporal da solução ondulatória fatoram e podemos escrever:

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t). \quad (7.7)$$

Nesta corda finita e fixa em ambas extremidades apenas podem ocorrer ondas estacionárias tais que:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad (7.8)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$ ou seja, apenas ondas estacionárias com comprimento de onda da forma:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (7.9)$$

são possíveis na corda. Cada valor de n define o que chamamos modo normal ou harmônico. A Figura 7.3 ilustra os quatro primeiros modos normais da corda fixa nas duas extremidades. Usando a relação 7.5 podemos escrever as frequências dos modos normais como:

$$f_n = n \frac{v}{2L}. \quad (7.10)$$

Assim, cada vez que escolhermos uma dessas frequências no gerador, veremos a corda vibrar como mostrado na Figura 7.3. Examinando o padrão de vibração podemos identificar o valor de n e calcular o valor de λ_n correspondente usando a Equação 7.9, bastando para isso medir o comprimento L da corda. Para mais detalhes sobre a parte teórica relativa a

esta prática consulte [1].

Ondas estacionárias em uma corda segmentada

No modelo descrito até então consideramos que o meio de propagação era uma corda homogênea. Vamos ver agora uma situação mais interessante: uma corda composta de dois segmentos com comprimentos, diâmetros e densidades lineares diferentes, que serão identificados pelos sub-índices A e B. A corda como um todo será excitada por uma frequência f , escolhida no gerador de frequências, e sujeita a uma tensão T . As velocidades de propagação nos segmentos são:

$$v_A = \sqrt{\frac{T}{\mu_A}}, \quad (7.11)$$

e

$$v_B = \sqrt{\frac{T}{\mu_B}}. \quad (7.12)$$

Assim, usando a Equação 7.5 temos:

$$\lambda_A = \frac{v_A}{f}, \quad (7.13)$$

e

$$\lambda_B = \frac{v_B}{f}. \quad (7.14)$$

Já que os comprimentos de onda em cada segmento são diferentes, podemos ajustar os comprimentos L_A e L_B de cada um de maneira a colocar ambos em algum modo normal. De acordo com a Equação 7.8 os valores de L_A e L_B devem ser tais que:

$$L_A = \frac{n_A \lambda_A}{2}, \quad (7.15)$$

e

$$L_B = \frac{n_B \lambda_B}{2}. \quad (7.16)$$

Examinado as expressões para L_A e L_B acima, vemos ser possível que $n_A \neq n_B$, ou seja, cada segmento pode estar em um harmônico diferente! Fazendo uma analogia com as ondas eletromagnéticas, podemos definir o índice de refração relativo aos meios A e B como:

$$\eta = \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{\mu_B}{\mu_A}} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}. \quad (7.17)$$

onde usamos as Equações 7.11, 7.12 para a velocidade das ondas transversais em cada segmento da corda.

7.3 Materiais

- régua;
- cordas;
- massas;
- suporte para massas;
- roldanas;
- gerador de frequências;
- um medidor de frequências;
- bobina.

7.4 Procedimento Experimental

- Meça o comprimento L da corda (vide Figura 7.2) e a massa M que a tensiona.
- Prepare a montagem como descrita na Figura 7.2.
- A massa que tensiona a corda deve ser tal que pelo menos 6 modos normais sejam observados, ou seja, a frequência do modo normal fundamental $n = 1$ não pode ser muito grande ($f_1 \approx 10\text{Hz}$). Para tanto utilize uma massa de 100 g a 200 g para cordas mais leves ou maior para as cordas mais densas (por que?) .
- Prenda o suporte em em uma das extremidades da corda e coloque a massa escolhida no mesmo. Meça distância entre a bobina e a roldana; esta será aproximadamente a distância L mostrada na Figura 7.2.
- Coloque a corda para oscilar, ajustando a amplitude e a frequência do gerador. Comece com uma amplitude correspondendo a metade da escala do gerador e com uma frequência menor que 10 Hz.
- Aumente a frequência aos poucos até que a onda estacionária correspondendo a $\lambda/2$ seja observada, mostrada na Figura 7.3. Faça a leitura da frequência de excitação da bobina no computador. Continue aumentando a frequência gradativamente para observar cada uma das ondas correspondentes a λ , $3\lambda/2$, 2λ , $5\lambda/2$, ... Para saber o comprimento de onda em cada caso, utilize o L medido.

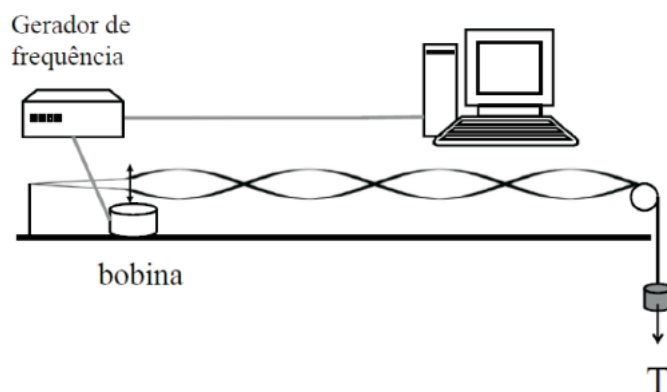


Figura 7.2: Esquema de montagem para o experimento da corda vibrante.

Para o experimento da corda segmentada, você deverá utilizar 2 cordas/fios diferentes

- Prepare a montagem como na Figura 7.4. Note que neste caso são necessárias duas roldanas e que o mesmo valor de massa deve ser usado nas duas extremidades;
- Experimente variar os comprimentos de cada segmento de corda movimentando o ponto de junção e a posição da bobina;
- Amarre dois pedaços de corda e prenda suas extremidades livres a massas idênticas. Uma das pontas livres deve passar primeiro pela bobina, como indicado na Figura 7.4.
- Varie a frequência do gerador até que você observe a formação dos modos normais. Os valores de L_A e L_B podem ser facilmente ajustados pela movimentação do ponto de junção primeiro e depois pelo deslocamento da bobina. O objetivo é que cada segmento tenha um número inteiro de meios comprimentos de onda;
- Escolha uma frequência tal que a corda segmentada vibre nos harmônicos n_A e n_B e preencha a tabela do relatório com esses valores, assim como os de L_A e L_B .

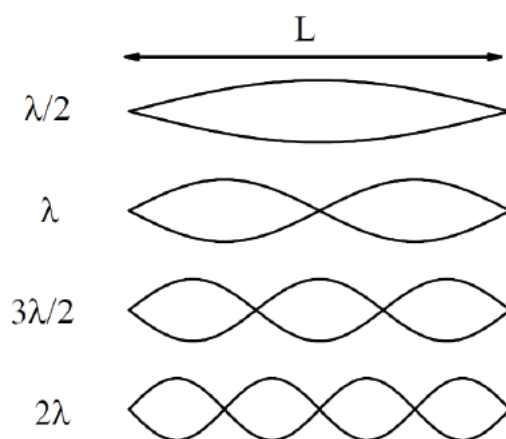


Figura 7.3: Diferentes modos de vibração esperados para $n=1,2,3$ e 4.

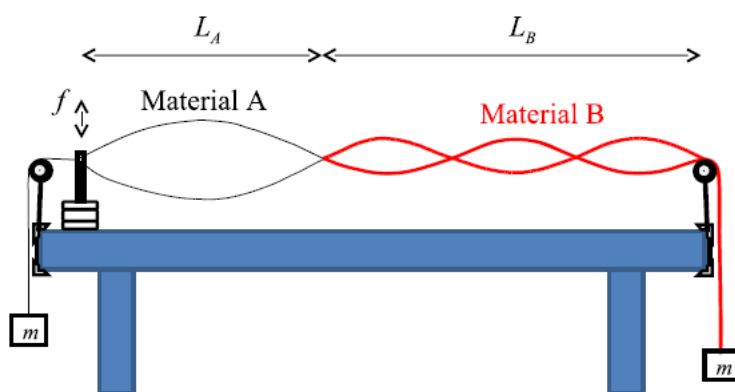


Figura 7.4: Esquema para montagem do experimento com a corda segmentada.

7.5 Análise de Dados

- Com os valores de massa e comprimento de cada corda, determine a densidade linear da corda;
- Com o valor da massa total que tensiona a corda, determine a velocidade de propagação da onda;
- Prepare uma tabela com os dados de comprimento de onda e frequência;
- Sabendo que a relação entre comprimento de onda e frequência é dada pela Equação 7.5, faça um ajuste de curva que descreva os dados da tabela. A partir do ajuste, determine a velocidade da onda.

Para a corda segmentada, a partir dos modos de vibrações observados em cada corda, determine o índice de refração.

7.6 Bibliografia

[1] H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica 2 - Fluídos, Oscilações, Ondas e Calor. Edgard Blucher, 2002.



Apêndices

8	Qtiplot	54
9	Qtiplot - Ajuste não Linear OHA	63
10	O Ajuste Não Linear	68
11	Webcam e Software	74



8. Qtiplot

O Qtiplot é um software, alternativo ao Origin, para análise de dados. Tendo em vista que o Qtiplot pode ser obtido compilado (arquivo executável) e usado livremente, recomendamos o uso deste software. Maiores detalhes sobre o este software (doações, participar do projeto de desenvolvimento, relatar um bug) podem ser obtidos na página do Qtiplot (<http://qtiplot.com>).

Ao executar o Qtiplot, você terá uma tabela vazia com as colunas 1 e 2, Figura 8.1, que estão associadas inicialmente como colunas que receberão os dados no eixo X e Y do gráfico, respectivamente.

Como exemplo, vamos utilizar os dados de um experimento do Empuxo. Nesse caso, digitaremos na coluna 1 (eixo X) os valores da massa M medida na balança. Na coluna 2 (eixo Y) digitaremos os valores do volume de líquido observado na proveta. Mais adiante, vamos tratar das incertezas e, portanto, vamos ignorá-las na tabela. A massa inicial do sistema (líquido+proveta) foi de $M_0 = (401,1 \pm 0,1)$ g , o volume inicial $V_0 = (147 \pm 2)$ ml.

Inicialmente, o gráfico a ser feito é $(M - M_0)$ vs $(V - V_0)$. Neste caso, podemos usar o qtiplot para recalculer os valores nas colunas 1(X) e 2(Y) de forma que tenhamos a diferença de massa e a diferença de volume. Para isso, vamos começar com a massa. Clique no label 1[X] da coluna correspondente para que esta coluna seja toda selecionada, Figura 8.3.

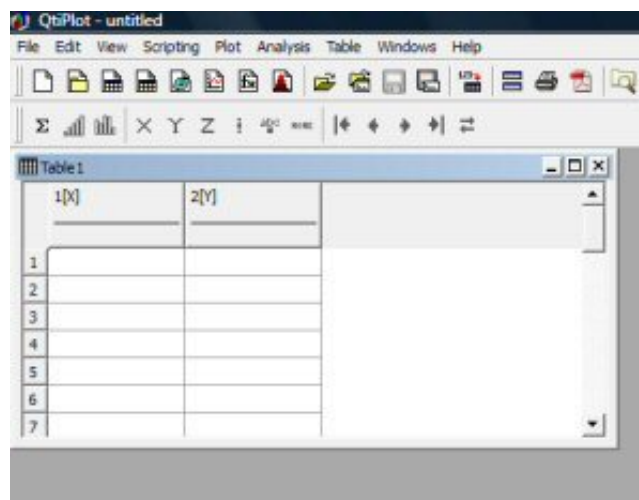


Figura 8.1: Tela inicial do Qtiplot.

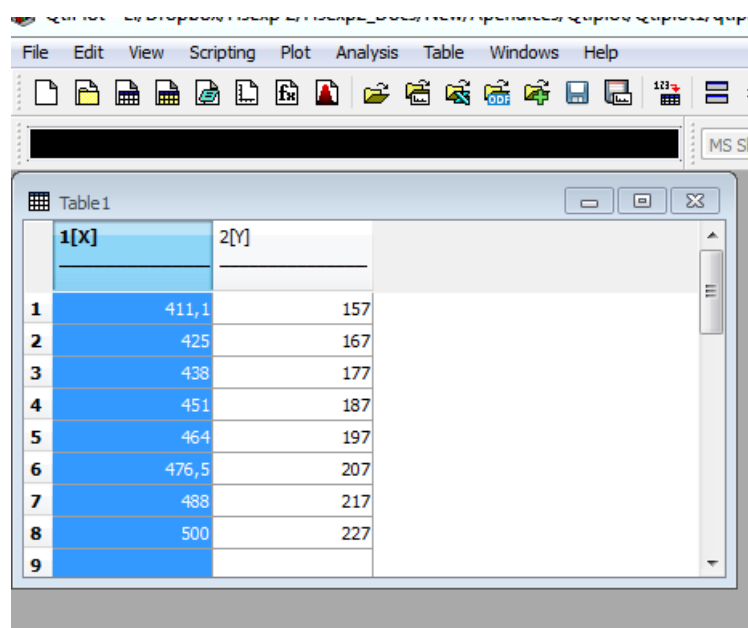
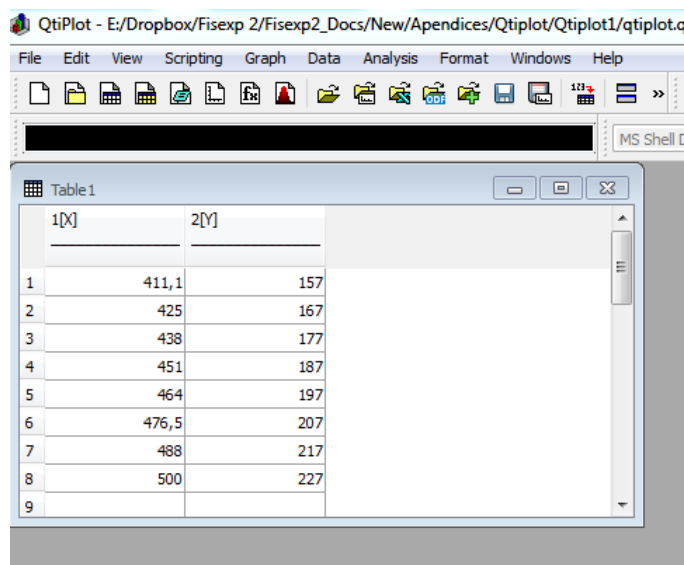


Figura 8.3: Selecionado uma coluna no Qtiplot.



QtiPlot - E:/Dropbox/Fisexp 2/Fisexp2_Docs/New/Apendices/Qtiplot/Qtiplot1/qtiplot.q

File Edit View Scripting Graph Data Analysis Format Windows Help

Table1

	1[X]	2[Y]
1	411,1	157
2	425	167
3	438	177
4	451	187
5	464	197
6	476,5	207
7	488	217
8	500	227
9		

Figura 8.2: Tabela preenchida com os dados de massa na coluna 1[X] e volume na coluna 2[Y].

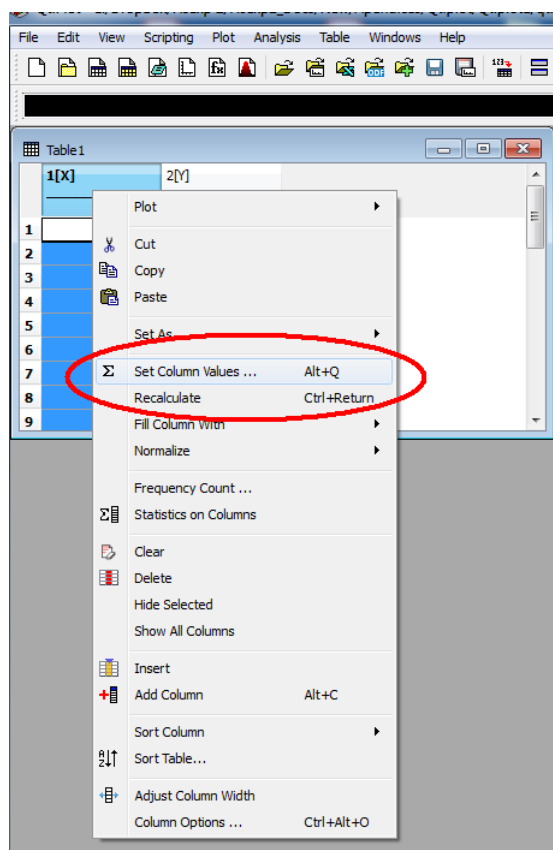


Figura 8.4: Seleção no menu para realizar cálculos nos dados da coluna selecionada.

Com a coluna selecionada, clique com o botão direito do mouse e você terá acesso a um menu, Figura 8.4, onde você selecionará "Set Column Values". Veja que seguindo o mesmo procedimento, nós podemos escolher outras ações, como fazer o gráfico, inserir coluna etc,

tudo isso clicando com o botão direito do mouse. Quando você selecionar a opção "Set column values", uma janela abrirá e nela você pode fazer operações aritméticas na coluna selecionada. Neste caso, vamos escrever na caixa de diálogo, a expressão `col(1)-401`, que é justamente $M-M_0$, onde M são os dados da coluna 1 e M_0 o valor da massa inicial. Após digitar a equação, clique no botão "Apply" e em seguida clique no botão "Close" para voltar a tabela já atualizada. Repita o mesmo procedimento para a coluna 2(Y) que tem os dados de volume do líquido. Neste caso, a equação é `col(2)-147`, onde 147 é o volume inicial e `col(2)` é coluna que contém o volume V .

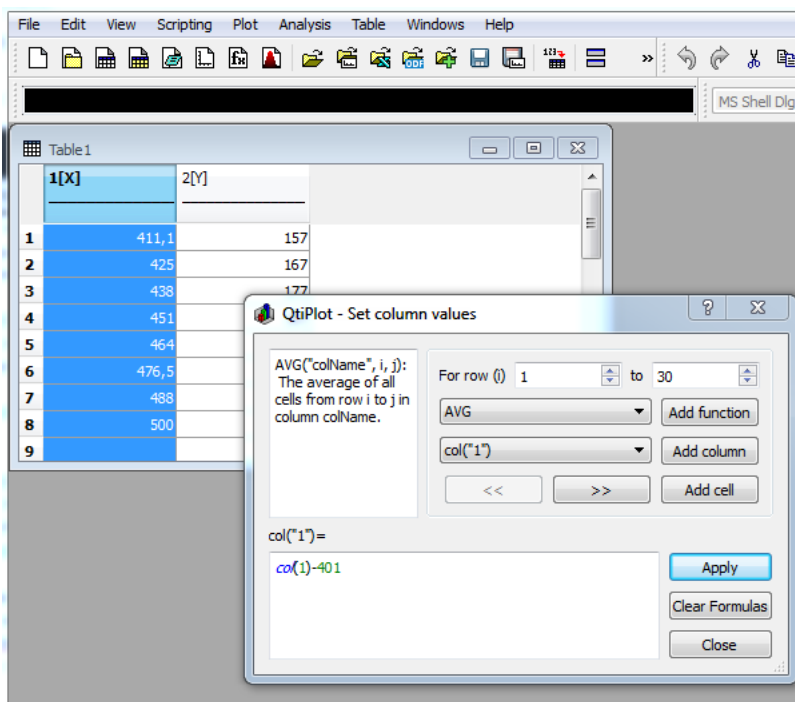


Figura 8.5: Digitando a fórmula para a ser aplicada nos dados da coluna 1[X].

Com as tabelas já atualizadas com os valores ($M-M_0$) e ($V-V_0$), podemos fazer o gráfico. Antes disso, vamos entrar na tabela os dados de incertezas. nesse exemplo, vamos colocar as incertezas do eixo y somente, embora o procedimento para as incertezas do eixo x seja o mesmo. Para colocar as incertezas, temos que adicionar uma nova coluna e indicá-la como incerteza de uma determinada coluna. Para isto, clique com o botão direito em alguma região fora da tabela. No menu que aparecerá, escolha "Add column", Figura 8.6.

Uma nova coluna em branco estará disponível. Note que essa nova coluna está definida como uma coluna 3[Y]. Para configurá-la como incerteza, selecione essa coluna e clique com o botão direito, escolhendo no menu a opção "Set As" e depois "Y Error". A coluna agora está definida como 3[yEr], Figura 8.8.

Com a tabela contendo os dados necessários, podemos fazer o gráfico. Você deve selecionar as colunas que devem ter os dados no gráfico. Como só temos uma coluna de X, não é necessário selecionar a coluna 1[X], mas somente as colunas 2[Y] e 3[yEr]. Com essas 2 colunas selecionadas, no menu principal selecione a opção Plot ou use o botão direito do mouse para clicar na opção "Plot" e depois "Scatter", Figura 8.9 e 8.10.

O QTIPLLOT exibirá o gráfico em uma outra janela. Note que esse gráfico, do jeito que está, Figura 8.11, está incompleto. O gráfico não tem informações sobre o que está sendo apresentado. Um pessoa que olhasse para esse gráfico, não sabe o que está no eixo Y, no

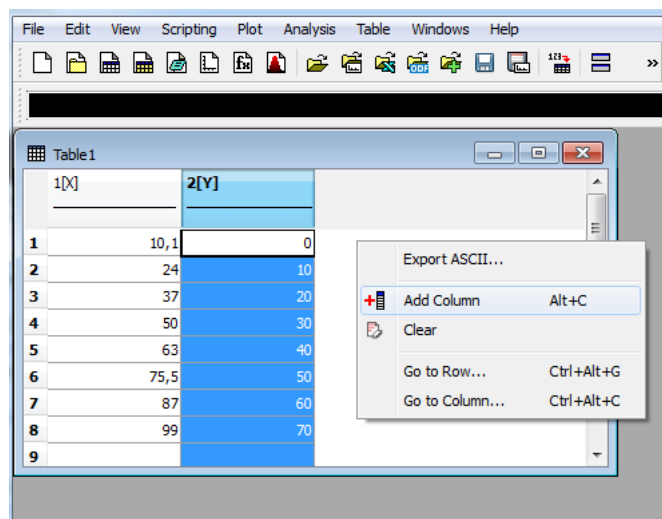


Figura 8.6: Adicionando uma nova coluna na tabela.

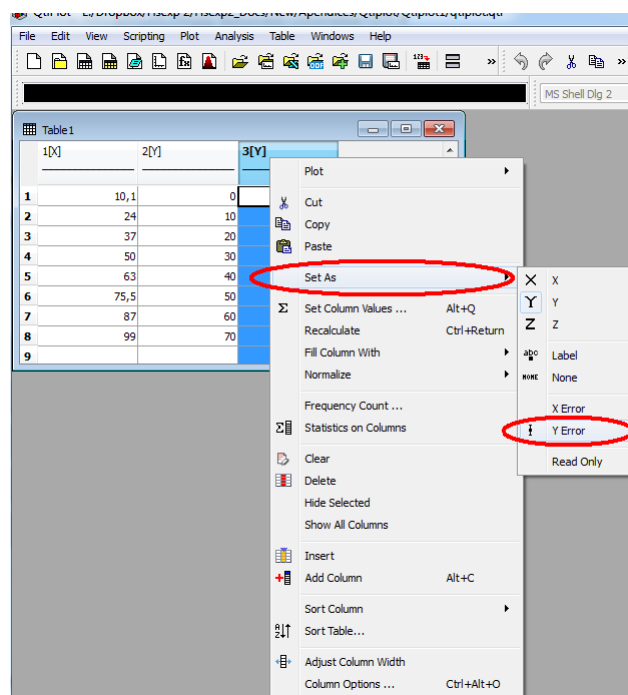
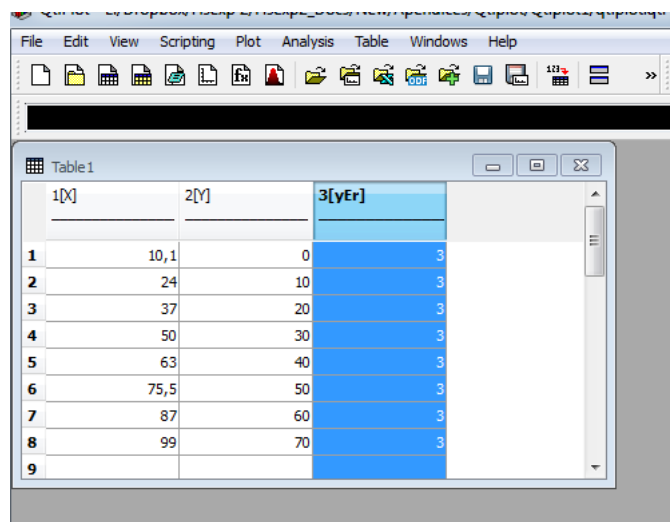


Figura 8.7: Definindo a coluna 3 como coluna de incertezas.

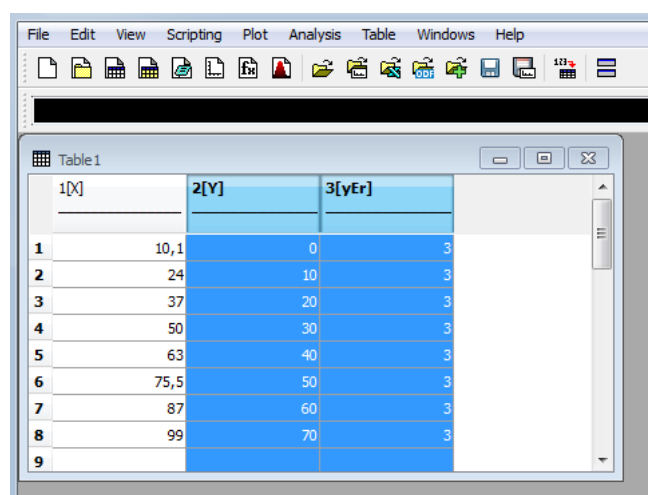
eixo X etc. Então, é necessário ajustar as propriedades desse gráfico de forma a torná-lo suficientemente auto-descritivo.

Para alterar as propriedades, basta clicar sobre as partes do gráfico que desejamos alterar, tais como: eixos, textos dos eixos, escalas, símbolos etc. Quando clicamos nesses elementos da tela do gráfico, outras janelas se abrirão e permitirão modificar as propriedades desses elementos. Clique duas vezes na palavra "X Axis Title" e mude esse texto para "(M-M0) (g)", depois repita o procedimento para modificar o eixo Y, colocando nesse eixo o texto que o identifica. Um exemplo de gráfico pronto para apresentação ou impressão é dado na Figura 8.12.



	1[X]	2[Y]	3[yEr]
1	10,1	0	3
2	24	10	3
3	37	20	3
4	50	30	3
5	63	40	3
6	75,5	50	3
7	87	60	3
8	99	70	3
9			

Figura 8.8: Tabela com colunas X, Y e yEr.



	1[X]	2[Y]	3[yEr]
1	10,1	0	3
2	24	10	3
3	37	20	3
4	50	30	3
5	63	40	3
6	75,5	50	3
7	87	60	3
8	99	70	3
9			

Figura 8.9: Selecionando as colunas para fazer o gráfico.

Para fazer a análise de dados, você não precisa modificar essas propriedades, mas se você for imprimir o gráfico para apresentar em um relatório, é recomendável que você as modifique.

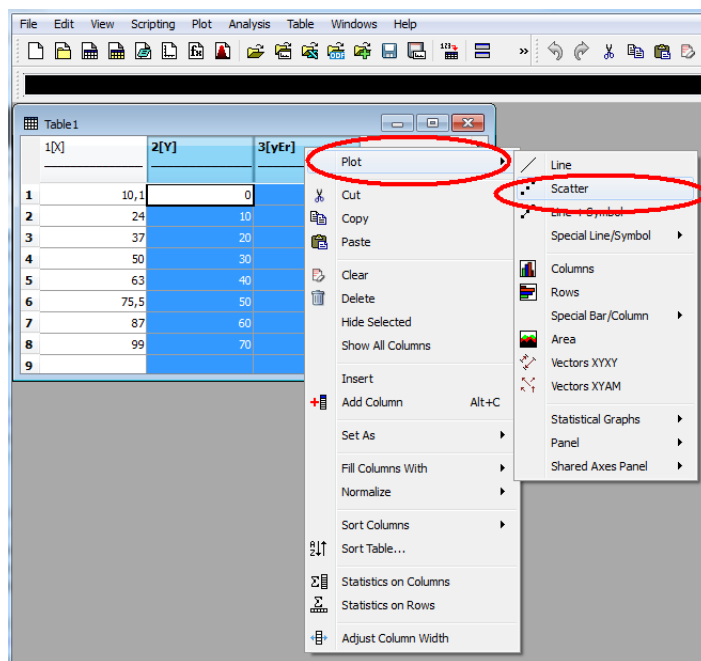


Figura 8.10: Fazendo o gráfico "Scatter" das colunas selecionadas.

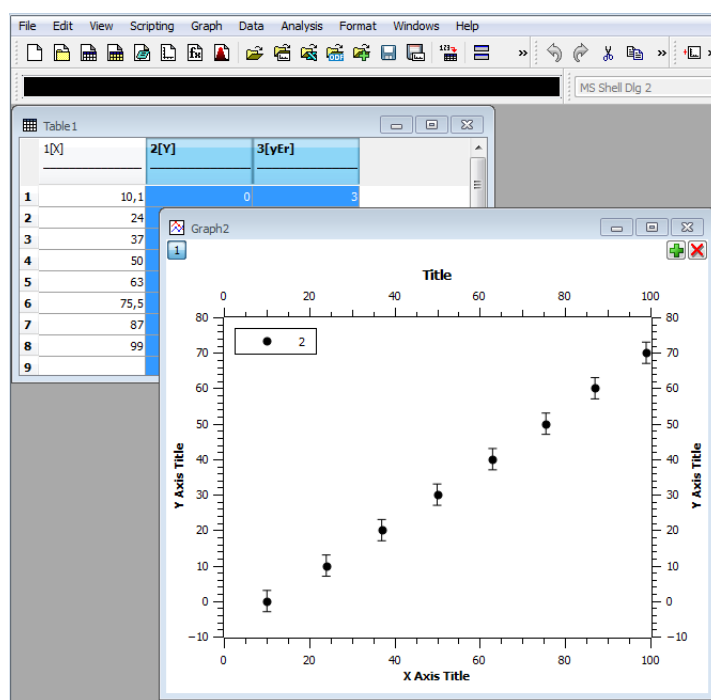


Figura 8.11: Gráfico do tipo Scatter dos dados.

Vamos agora analisar os resultados.

Clique com o botão direito nesse gráfico e escolha a opção "Analysis". Essa opção também pode ser acessada no menu principal Figura 8.13.

Selecione ajuste linear ("Fit Linear"), o qual é previsto pelo modelo teórico.

Agora temos a nossa melhor reta traçada no gráfico. O resultado aparece na janela "Results Log", Figura 8.14.

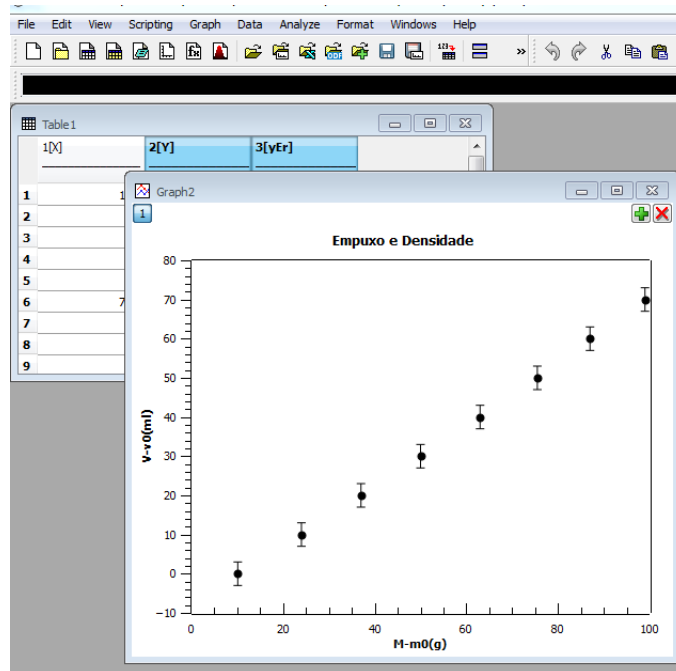


Figura 8.12: Gráfico pronto para impressão.

O coeficiente linear é o parâmetro B e o coeficiente angular é o parâmetro A .

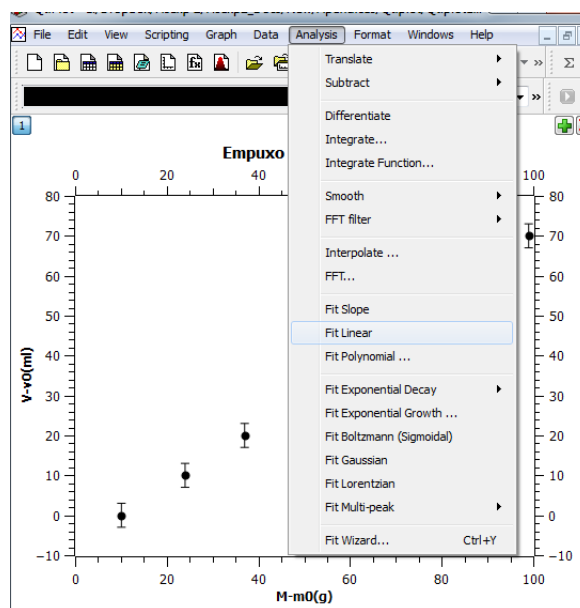


Figura 8.13: Fazendo o ajuste de reta.

Considerando o que vimos no Capítulo 1 deste livro, temos como resultado para o coeficiente angular:

$$A = (0,79 \pm 0,04)ml/g$$

Como neste exemplo a densidade é dada pelo inverso do coeficiente angular e sua incerteza via a propagação da incerteza de A , temos que:

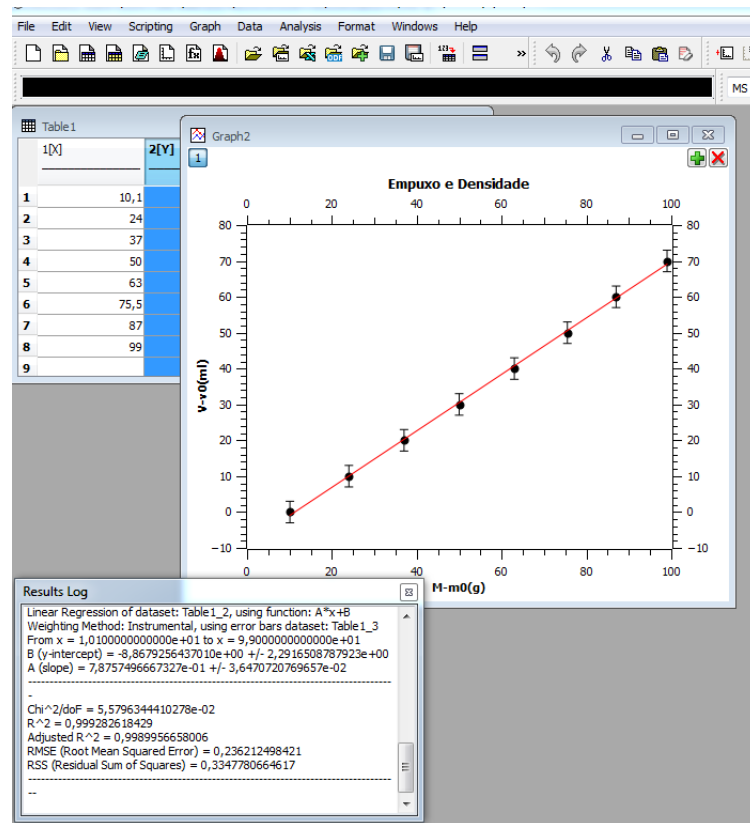


Figura 8.14: Resultado do ajuste de reta.

$$\rho = (1,27 \pm 0,06)g/ml$$

O resultado esperado era de 1,26 g/ml para a densidade da glicerina, conforme o roteiro do curso.

9. Qtiplot - Ajuste não Linear OHA

No experimento do oscilador harmônico, nós iremos ajustar a uma função não linear, Equação 6.6. Para isso, inicie o Qtiplot e faça o gráfico dos dados experimentais que correspondem ao movimento no eixo y, Figura 9.1 Para Iniciar o ajuste não linear, vá no menu da barra superior, clique em Análise e depois em Ajuste não Linear.

A partir deste ponto, você deverá procurar ou selecionar a equação de ajuste, se alguém já tiver feito isso antes, ou senão você deverá digitar a equação de ajuste como na Figura 9.2.

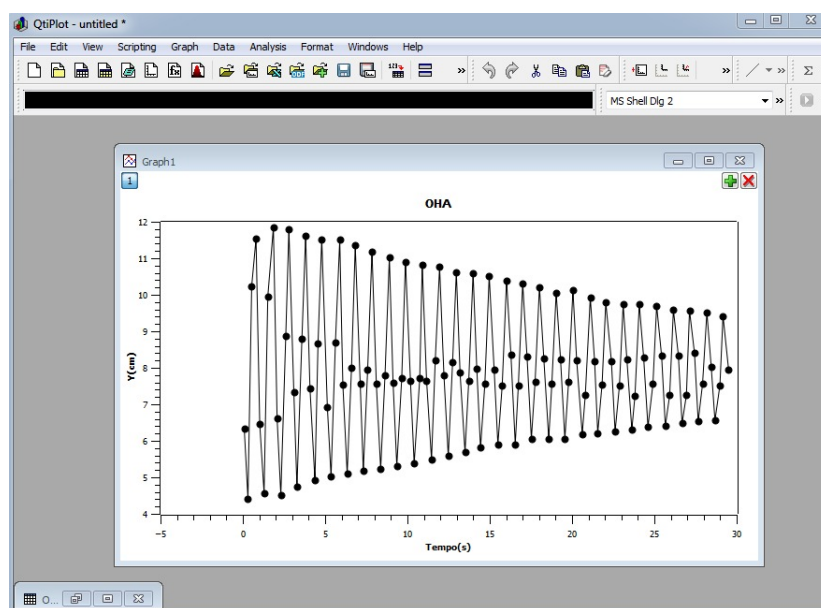


Figura 9.1: Gráfico do deslocamento vertical da massa M do OHA.

Se a função já estiver no QTILOT, basta selecioná-la e clicar no botão "add expression"

e as informações da equação serão carregadas. No exemplo da Figura 9.2, os parâmetros a serem ajustados são: a amplitude inicial A , o período T , o tempo de relaxação t , o tempo inicial x_0 e o valor de "offset" y_0 . Se você tiver que alterar algo na equação ou criar uma nova equação, simplesmente digite ela na "caixa" de texto inferior, depois clique no botão "save" e dê um nome para a função. Com a equação carregada, clique no botão de seta na parte inferior da tela para que você entre na janela onde é feito o fit ("ajuste") dos parâmetros.

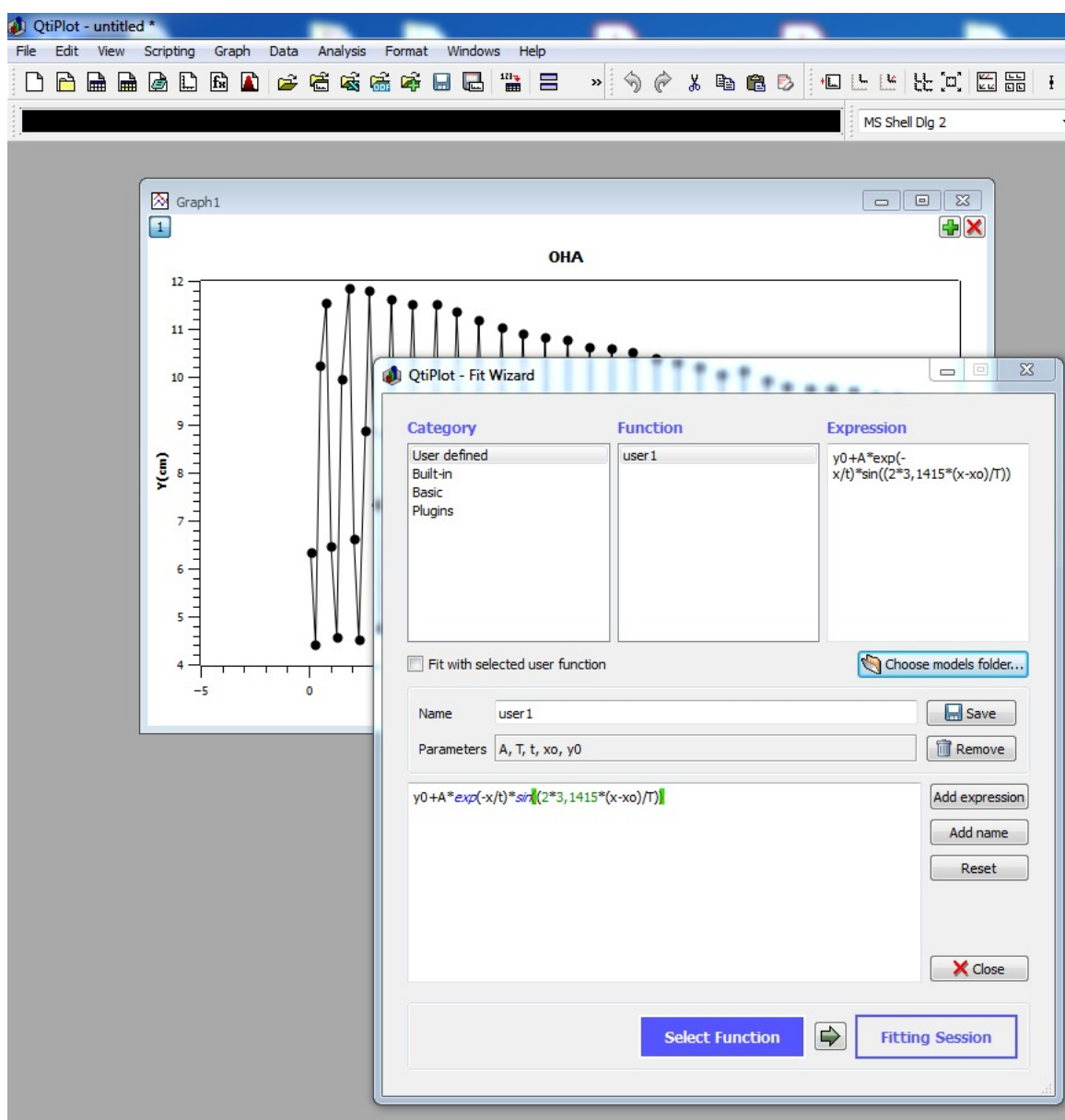


Figura 9.2: Tela inicial para selecionar a equação do ajuste não linear.

A Figura 9.3 mostra a janela onde efetivamente ocorre a sessão de ajuste da equação. A princípio você pode ser tentado a clicar diretamente no botão "fit". Se você fizer isso, é muito provável que os valores apresentados não correspondam aqueles que descrevem os dados experimentais, veja a curva em vermelho na Figura 9.3.

Para que o ajuste produza resultados adequados, é necessário fazer uma estimativa

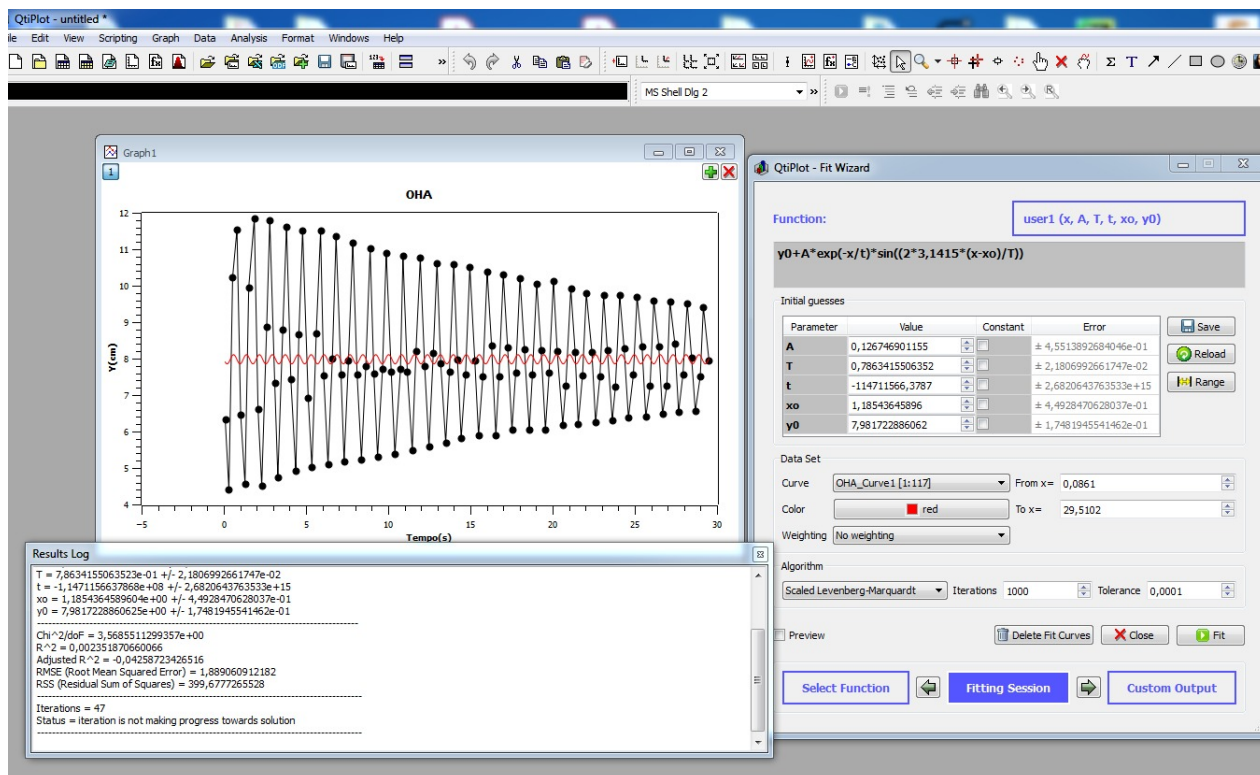


Figura 9.3: Ajuste com valores inadequados. linha vermelha corresponde a função com os parâmetros ajustados inadequadamente.

razoável para os valores dos parâmetros e ainda seleccionar uma parte pequena do conjunto de dados, como mostrado na Figura 9.4.

Olhando o gráfico, vemos que o período é da ordem de 1s. vemos que y_0 está por volta de 8cm e a amplitude inicial A é aproximadamente 4 cm. Para x_0 sugerimos algo próximo de 1s.

Com os valores iniciais para realizar o ajuste, o Qtiplot consegue convergir para os valores que melhor descrevem os pontos experimentais segundo a equação solicitada, veja na Figura 9.5.

Uma vez, feito o ajuste para uma pequena porção dos dados experimentais, podemos estender ao restante dos dados experimentais, no caso, até 30 segundos, como mostrado na Figura 9.6. Note que ao refazer o ajuste, estendendo-o a todos os dados e fazendo com que os parâmetros ajustados anteriormente sejam uma nova estimativa, nós teremos agora um novo conjunto de valores para os parâmetros de ajuste que agora descrevem todos os pontos experimentais.

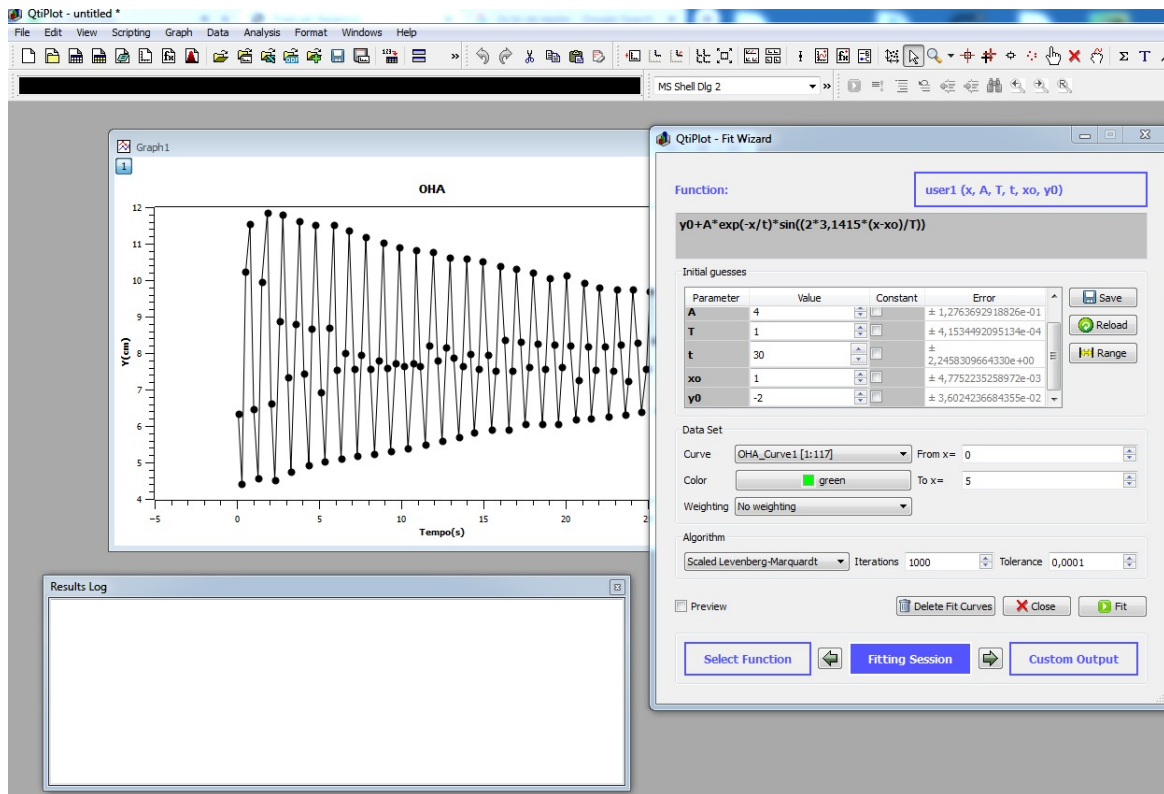


Figura 9.4: Ajuste com valores adequados e numa pequena região de dados, de 0 a 5s.

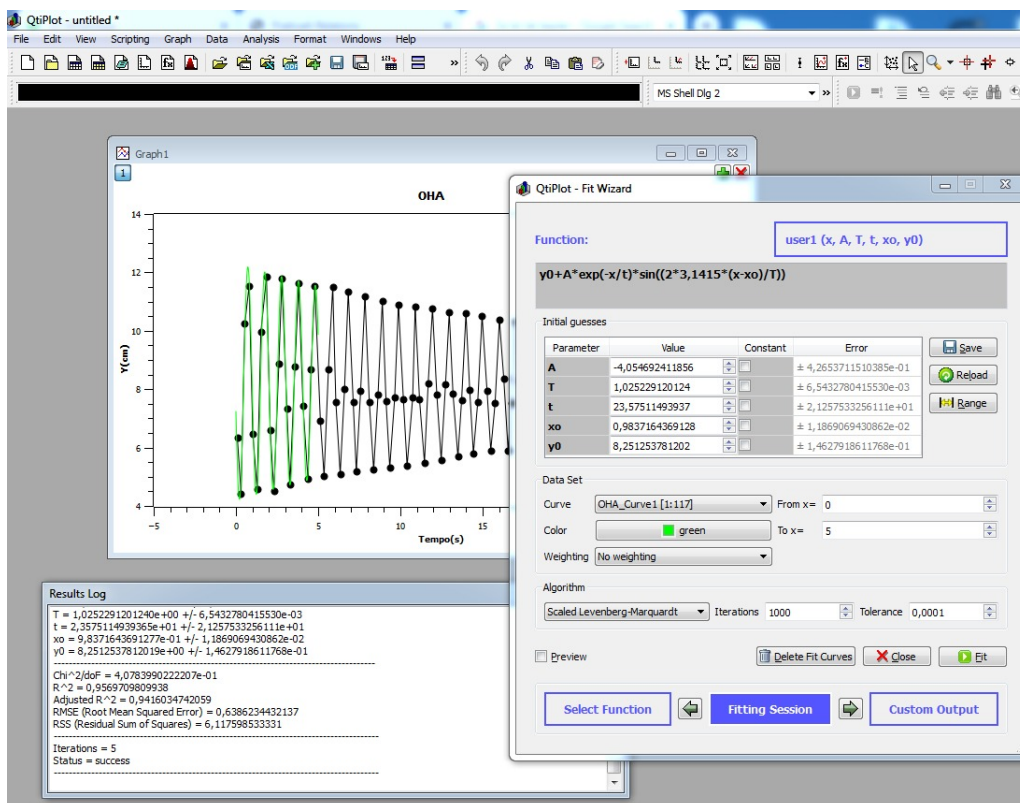


Figura 9.5: Resultado do ajuste considerando somente dados no intervalo do eixo x entre 0 e 5 s.

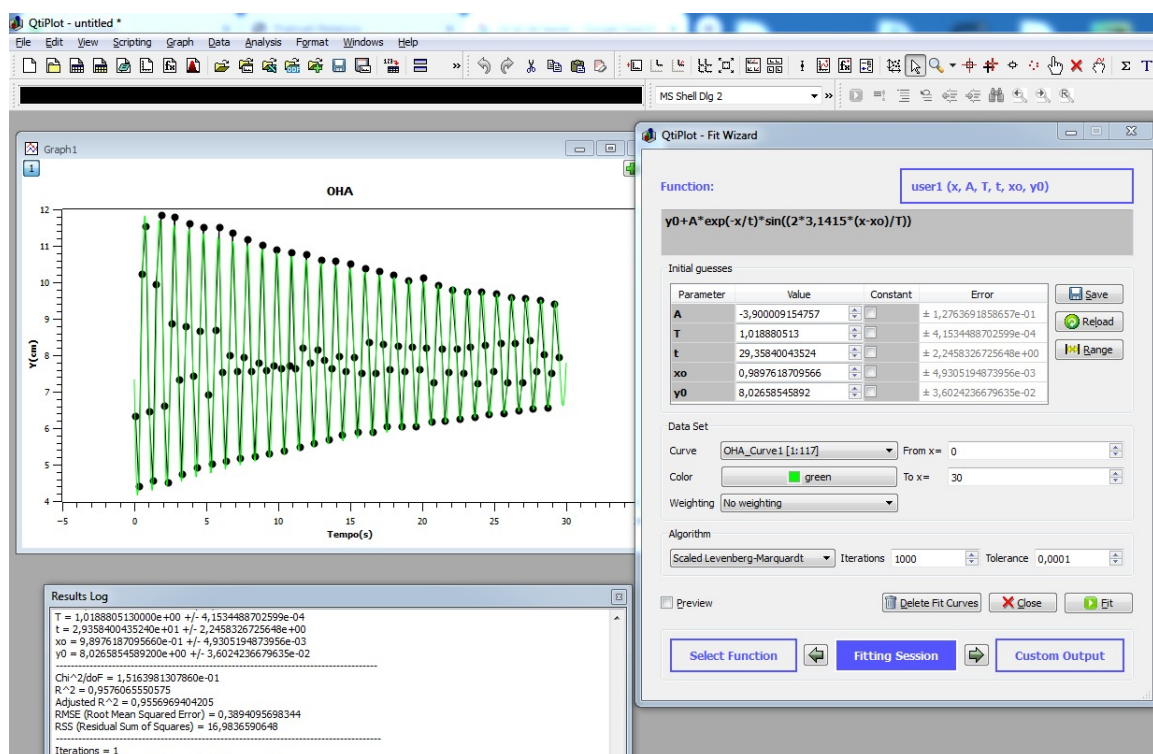


Figura 9.6: Estendendo o ajuste para x até 30s.



10. O Ajuste Não Linear

Em Física Experimental I, foi apresentado o Método dos Mínimos Quadrados para o ajuste linear. Esse método propõe que a melhor reta $y = ax + b$ para representar um conjunto de dados

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

é aquela cujos coeficientes minimizam a função

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - b - ax_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (10.1)$$

Calculando as derivadas de χ com relação a a e b pudemos obter expressões analíticas para os coeficientes da reta ajustada, a^* e b^* , em função dos pontos experimentais. Assim, fazer um ajuste linear resume-se ao cálculo de duas expressões. Entretanto, uma função linear nem sempre é a mais adequada para descrever um conjunto de pontos experimentais. Como faríamos para ajustar uma função não linear aos dados? Muitas vezes podemos intuir uma determinada relação funcional entre variáveis, a partir da formulação de um modelo teórico. Neste caso queremos saber, além do valor de alguns parâmetros, se a escolha da função foi apropriada. Nosso ponto de partida será a hipótese de que a função de ajuste tenha a forma

$$y = f(x; a, b)$$

onde a e b são dois parâmetros cujos valores resultarão do processo de ajuste. Num caso geral, podemos ter mais parâmetros. Nesses casos costuma-se escrever a função de ajuste como $y = f(x; \vec{p})$ onde o vetor $\vec{p}$ representa o vetor de parâmetros, com M componentes $p_1, p_2, \dots, p_M$. Assim para nós, $M = 2$, $p_1 = a$ e $p_2 = b$.

De forma análoga ao ajuste linear definimos

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y = f(x; a, b)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (10.2)$$

que deve ser minimizada como no caso do ajuste linear. Neste caso temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi^2}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - f(x; a, b)}{\sigma_i} \right] \left[\frac{\partial f(x; a, b)}{\partial a} \right] = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - f(x; a, b)}{\sigma_i^2} \right] \left[\frac{\partial f(x; a, b)}{\partial b} \right] = 0\end{aligned}\quad (10.3)$$

No ajuste linear, onde $f = ax + b$, o sistema de equações definido em (C.3) tem duas equações lineares e pode ser resolvido analiticamente com as técnicas aprendidas em Física Experimental I para os coeficientes da melhor reta. Em praticamente todos os outros casos isso não será possível, por isso teremos que usar um método em que nos aproximamos do mínimo através de iterações. A forma específica de como realizar esse processo de minimização é bastante complexa e existem vários métodos para isso. Uma explicação detalhada pode ser encontrada em [?]. Para nós o que importa é entender que no caso não linear o ajuste é feito através de um sucessão de aproximações e que a escolha do ponto inicial pode ser de fundamental importância para se chegar ao mínimo certo. Uma escolha equivocada pode levar à não convergência do processo iterativo, ou a valores de parâmetros completamente errados. Por exemplo, suponha a situação hipotética ilustrada na figura C.1, onde temos apenas um parâmetro de ajuste, a . A função $\chi^2(a)$ tem um mínimo local em $a = a_{err}$ e um mínimo global em $a = a^*$, correspondendo ao resultado desejado para o ajuste em questão. Se escolhermos inicialmente o valor de a correspondendo ao ponto 1, podemos terminar o processo de ajuste com um valor errado para a . Um ajuste bem sucedido, neste caso, terá o valor inicial nas vizinhanças de a^2 , como o ponto 2. Essa situação parece paradoxal, afinal temos que saber a resposta para saber a resposta? De uma certa forma sim. Aqui, sempre seremos capazes de estimar bem os valores iniciais de a e b . Numa investigação científica, onde se está lidando com situações inéditas, pode ser bem trabalhoso encontrar uma boa escolha inicial de parâmetros.

A aproximação quadrática para $\chi^2(a, b)$

O processo iterativo de aproximação ao mínimo é feito com base na ideia de que, perto do mínimo, onde $a = a^*$ e $b = b^*$, toda função pode ser escrita como uma parábola. Nesta aproximação, para o caso de dois parâmetros de ajuste, a função χ^2 tem a forma

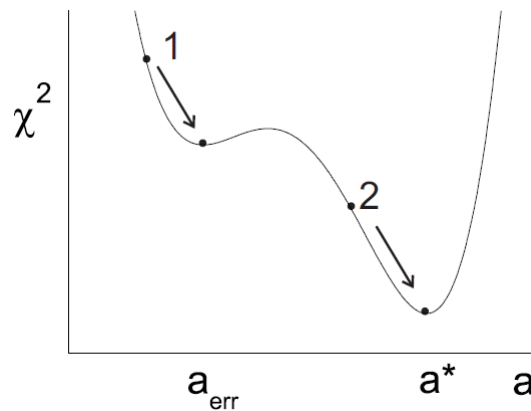


Figura 10.1: Ilustração do processo iterativo para o ajuste não linear. Num sistema hipotético com apenas um parâmetro, a função $\chi^2(a)$ tem um mínimo local além do global. Iniciando o ajuste em 1, podemos chegar ao resultado errado

$$\chi^2 \approx \gamma - (d_a a + d_b b) + a^2 D_{aa} + b^2 D_{bb} + 2ab D_{ab} = \gamma - \vec{d} \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{p} \quad (10.4)$$

onde γ é um termo constante independente de a e b , e

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial b^2} \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

sendo as derivadas calculadas no ponto de mínimo. A expressão (C.4) nada mais é que uma expansão em série de potências, até o termo quadrático apenas, para uma função de duas variáveis. O processo de minimização será uma trajetória no espaço bidimensional dos parâmetros. Para iniciar a aproximação ao mínimo, definimos um ponto de partida $p_{atual} = (a_{atual}, b_{atual})$. Se a aproximação quadrática for muito boa, em um passo podemos chegar ao mínimo, que estará em

$$\vec{p} = \vec{p}_{atual} + \mathbf{D}^{-1} \cdot [-\nabla \chi^2 |_{\vec{p}=\vec{p}_{atual}}]$$

Em geral não devemos contar com isso, então vamos dar pequenos passos em direção ao mínimo, em outras palavras, devemos iterar várias vezes a relação

$$\vec{p}_{proximo} = \vec{p}_{atual} - \text{constante}[-\nabla \chi^2 |_{\vec{p}=\vec{p}_{atual}}]$$

O ajuste não linear no QtiPlot

Vamos usar um exemplo concreto. Imagine que se queira estudar o período de oscilação de uma barra de cerca de 1 m de comprimento, cheia de orifícios, por onde pode ser pendurada e posta para oscilar, como mostrado na figura C.2. O modelo teórico para o sistema diz que o período para pequenas oscilações é

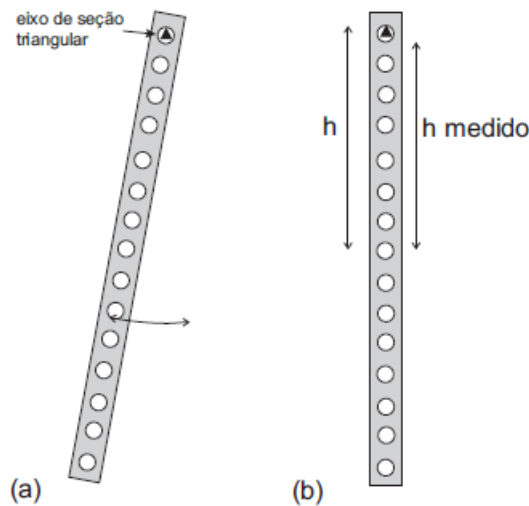


Figura 10.2: (a) Oscilação de uma barra perfurada em torno de um eixo de seção triangular. (b) h é a medida que corretamente à distância entre eixo de oscilação e centro de massa. A medida realizada corresponde, h_{medido} é sistematicamente menor do que h .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_{CM}^2 + h^2}{gh}} \quad (10.6)$$

onde g é a aceleração da gravidade, r_{CM} , o raio de giração da barra com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa e h , a distância (variável) entre o CM e eixo de oscilação. Na experiência, o período é medido para diversos valores de h , com o objetivo de ajustar a função do modelo a eles e obter os valores de g e r_{CM} . O raio de giração nos fornece a informação sobre a geometria do objeto no valor do momento de inércia e é fundamental na determinação do comportamento de um corpo rígido em movimento de rotação. Em princípio, bastaria calcular o momento de inércia para se saber o raio de giração. Por exemplo, é fácil calcular o momento de inércia de uma barra uniforme de massa M e comprimento L , girando em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa (CM). Você já deve ter feito esse cálculo: $I_{CM} = ML^2/12$. Assim, neste caso, $r_{CM}^2 = L^2/12$. Mas, como fazer se o objeto tiver uma forma tal que seja difícil definir o volume de integração? Neste caso, podemos determinar raio de giração estudando o comportamento do período de oscilação do objeto.

A função $T(h)$ é obviamente não linear e depende de dois parâmetros $a = g$ e $b = r_{CM}$. Queremos encontrar os melhores valores de a e b para nosso conjunto de pontos experimentais, supondo que a função de ajuste tenha a forma C.6.

	h[m]	T[s]	dT[yEr]
1	5,0	2,74	0,04
2	10,0	2,02	0,04
3	15,0	1,72	0,04
4	20,0	1,60	0,04
5	25,0	1,56	0,04
6	30,0	1,52	0,04
7	35,0	1,56	0,04
8	40,0	1,58	0,04
9	45,0	1,64	0,04
10	50,0	1,66	0,04

Figura 10.3: Tabela típica para o ajuste não linear

Para começar o ajuste partimos da tabela com os valores de h , T , que serão x e y , respectivamente, e δT (yEr) como indicado na figura C.3. Selecione as três colunas, pressione o botão direito do mouse e escolha Plot-Scatter. Você terá um gráfico com os pontos experimentais, incluindo as barras de erro. Agora selecione o gráfico e escolha no menu superior Analysis-Fit Wizard. Você verá uma janela de diálogo como a mostrada na figura C.4. Escolha a função apropriada e pressione o botão Add Expression para que a expressão apareça na janela inferior, como mostrado na figura. Caso a função desejada não apareça, você pode digitá-la no retângulo indicado como Expression e seguir o resto do procedimento. A tabela a seguir mostra algumas das funções e dos operadores mais utilizados para definir as funções de ajuste.

Pressione Fit. Aparecerá a próxima janela de diálogo, como a mostrada na Figura C.5. Note que o default é não ponderar os dados (Figura 10.3 a). Vamos escolher a ponderação como na definição (C.2), ou seja, a ponderação será feita com os valores de δT indicados na coluna dT da tabela mostrada na figura Figura C.3. A Figura 10.5 b mostra o resultado dessa escolha. Note que, mesmo que os valores de incerteza sejam todos iguais, devemos fazer esta escolha para que o valor de $\chi^2/(N - 2)$ dado ao final do ajuste tenha significado. Agora vem um passo extremamente importante para o sucesso do ajuste. Note que temos

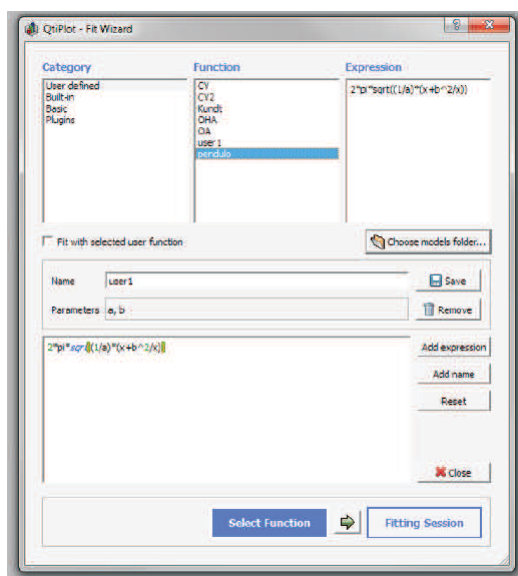


Figura 10.4: Janela inicial de diálogo do Fit Wizard.

$a = 1$ e $b = 1$ na janela de diálogo. Esses são os valores iniciais dos parâmetros de ajuste. Será que esses valores são uma boa escolha? Vamos analisar nossos dados. Temos h em centímetros e T em segundos, portanto, o valor de a , que deve ser o da aceleração da gravidade, está em cm/s^2 . Sabemos que $g \approx 103 \text{ cm/s}^2$, portanto, começar com $a = 1$ pode não levar a um resultado correto. Da mesma forma, b deve ser o raio de giração de uma barra com cerca de 1 m de comprimento, ou seja $b \approx 100 \text{ cm}$. de novo, a escolha $a = 1$ pode não ser boa. Após essa análise, escolha valores iniciais próximos do que você espera e pressione Fit. Feito isso, temos o resultado:

$$a = 9,8738191112670e + 02 + / - 1,7198160068460e + 01$$

$$b = -3,0105180431601e + 01 + / - 3,6996938180638e - 01$$

Corrigindo os algarismos significativos e adicionando as unidades obtemos:

$$a = g = (99 \pm 2) \times 10 \text{ cm/s}^2 = (9,9 \pm 0,2) \text{ m/s}^2$$

O sinal negativo em b não importa realmente, porque na expressão dada temos b^2 . O resultado final pode ser visto na Figura 10.6.

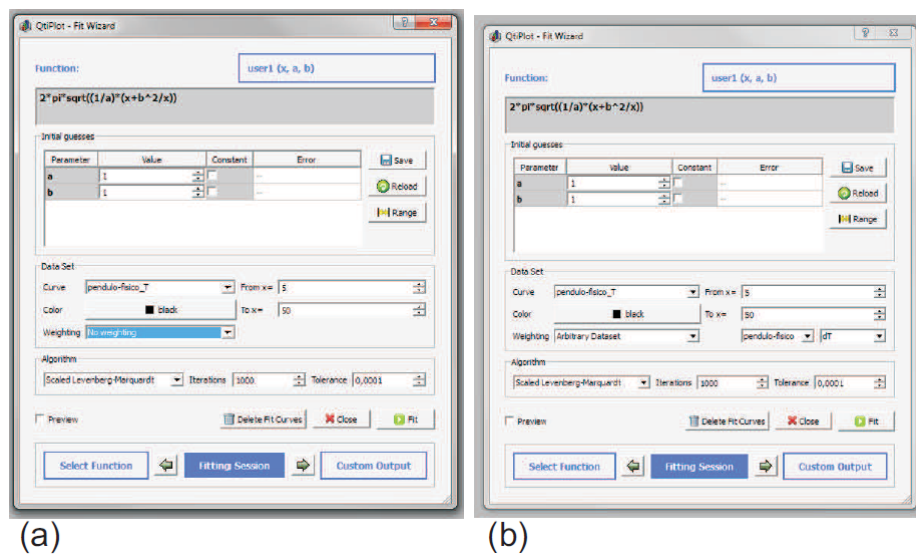


Figura 10.5: Janela intermediária de diálogo do Fit Wizard. (a) com a opção default de não ponderar os dados (no weighting); (b) com escolha de ponderação dos dados (weighting) pelas incertezas de y, que estão na coluna dT da tabela, como indicado na Figura 10.3.

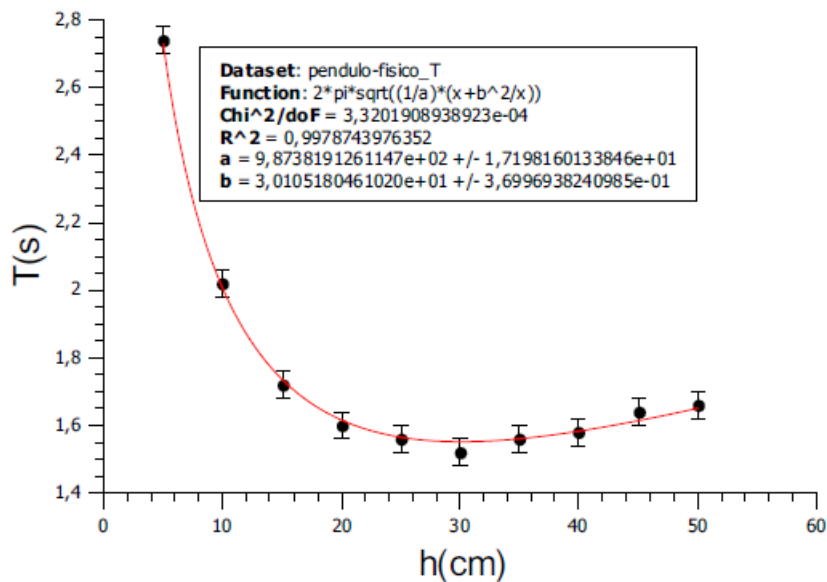


Figura 10.6: Representação gráfica dos pontos experimentais e da curva ajustada.

11. Webcam e Software

Várias experiências de física básica requerem o registro temporal de algum movimento. Dependendo do tipo de sistema e de que informações são necessárias, registrar a imagem do objeto em movimento pode ser uma ótima solução. Neste Apêndice vamos ver como estudar um movimento oscilatório vertical com essa técnica. O sistema que queremos estudar é composto por um pequeno tubo contendo massas, ligado a uma mola que, por sua vez, está presa a um suporte, como mostrado na Figura 11.1. O primeiro cuidado é a escolha de um anteparo de cor uniforme e contrastante. Por exemplo, para tubos escuros, como o que será mostrado nas próximas figuras, o ideal é um anteparo branco. Depois disso deve-se alinhar a câmera e o corpo em movimento.

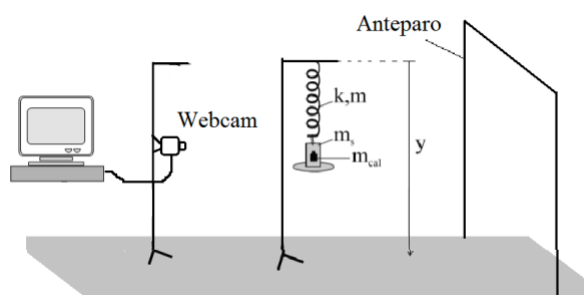


Figura 11.1: Esquema da montagem experimental para a utilização da webcam.

O programa que vamos usar chama-se WebCam e foi desenvolvido por um aluno de doutorado do Instituto de Física, Renato Teixeira Mourão. Antes de iniciá-lo é preciso abrir o programa Manycam. Depois de iniciado, ele mostrará uma janela inicial como a da Figura 11.2. Nela vemos a imagem do objeto cujo movimento desejamos registrar. Para que o programa funcione, precisamos definir o objeto com relação ao fundo. Note que inicialmente estamos vendo uma parte da mola, acima do tubo, e a parte interna do tubo

tem a mesma cor do fundo.

Para definir o objeto temos que editar os limiares de detecção. No sistema RGB, a imagem é decomposta nas cores vermelho, verde e azul, estabelecendo para cada uma dessas cores um valor entre o máximo possível de reprodução daquela cor e o mínimo ou seja, a ausência total dela, o que corresponde ao intervalo 0-255. A soma dos três valores resulta num ponto colorido da imagem final. O programa verifica valor da soma das três cores, se este valor está no intervalo, o pontos torna-se vermelho, caso o contrário o ponto torna se preto. A ideia é fazer com que o objeto que queremos seguir fique vermelho e todo resto, preto. Normalmente isso leva a valores ente 0 e 80 para o limiar. O programa calculará o centro dessa região vermelha e nos informará sua posição a intervalos de tempo constante. A Figura 11.3 mostra como deve ficar a imagem do objeto depois de se realizar essa etapa corretamente.

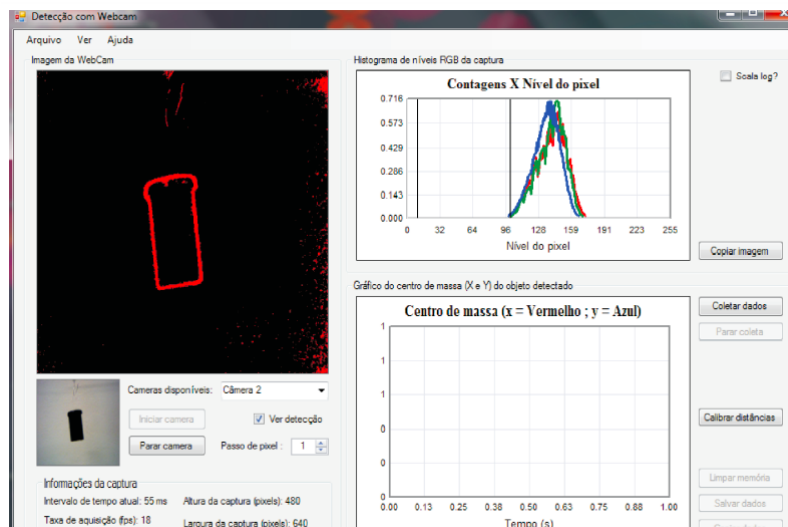


Figura 11.2: Janela inicial do programa de aquisição de imagens.

A próxima etapa é calibrar distâncias. A webcam trabalha com tamanhos em pixels, precisamos saber a equivalência entre pixel e centímetro. Para tal basta justapor uma régua ao objeto de estudo e adquirir essa imagem apertando o botão Calibrar distâncias. Agora, marque um segmento de tamanho conhecido sobre a régua, apertando primeiro o botão esquerdo e depois, no ponto final, o botão direito. Na figura foi marcado uma segmento de 2 cm sobre a régua. Preencha o tamanho do segmento, em centímetros na janela Distance(real), como indicado na figura e aperte o botão Accept. A partir desse ponto não mexa mais no sistema! Finalmente, ponha o objeto para oscilar e aperte o botão Coletar dados. O registro do movimento aparece na janela inferior direita. Em azul é o movimento ao longo de y e em vermelho, ao longo de x. No caso estamos interessados apenas no movimento em y.

Quando chegar o final, pare a aquisição apertando o botão Parar Coleta. Para salvar os dados para análise aperte o botão Salvar dados. O registro do movimento será feito num arquivo .DAT que ficará na área de trabalho e pode ser importado por qualquer programa de gráficos. O conteúdo desse arquivo tem a seguinte forma:

Uma observação importante: quando uma medição é refeita, ele não limpa os dados anteriores. O resultado será um arquivo de saída contendo diversas trajetórias. Para que isso não aconteça, você deve parar a aquisição e depois reinicializar a câmera.

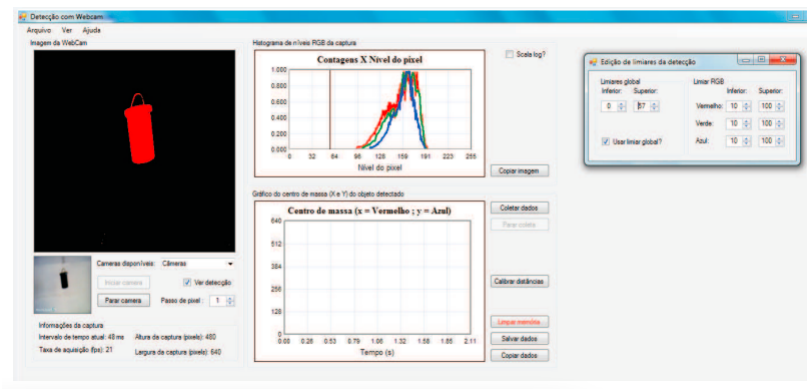


Figura 11.3: Imagem após a redefinição dos limiares de detecção.



Figura 11.4: Calibração pixel-cm. A seta amarela indica o segmento traçado sobre a régua com o mouse.

Time (s)	X (pixels)	Y (pixels)	X (cali- brado)	Y (cali- brado)
0,0110006	319,0259	239,0363	15,63852	11,71747
0,1200069	318,9688	236,7283	15,63573	11,60433
0,2400137	...			

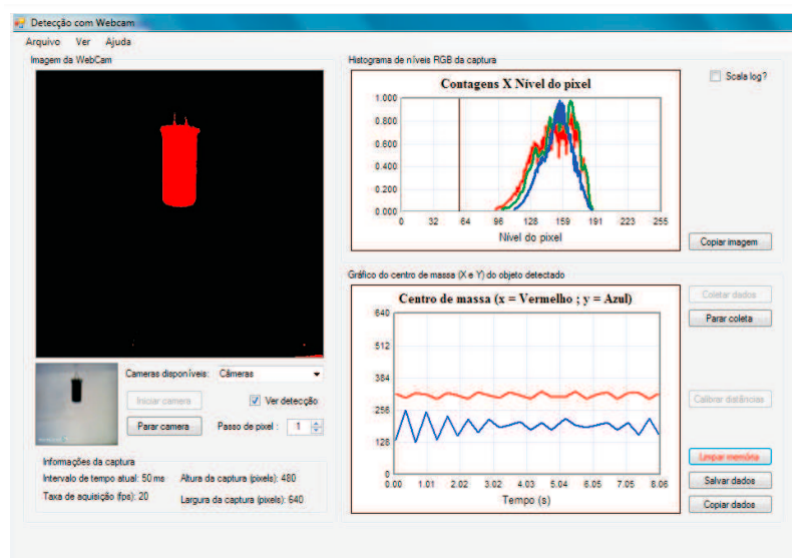


Figura 11.5: Calibração pixel-cm. A seta amarela indica o segmento traçado sobre a régua com o mouse.